

N° d'enregistrement au C.N.R.S. :

A.O. 4800

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Klaus KEIMEL

1^{re} Thèse. — Représentation de groupes et d'anneaux réticulés par des sections
dans des faisceaux.

2^e Thèse. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues, le 16 Juin 1970, devant la Commission d'Examen :

Mme M.L. DUBREIL JACOTIN

Président

MM. J. DIXMIER

M. SCHÜTZENBERGER

} Examinateurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551501_0027

N° d'enregistrement au C.N.R.S. :

A.O. 4800

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Klaus KEIMEL

1^{re} Thèse. — Représentation de groupes et d'anneaux réticulés par des sections
dans des faisceaux.

2^e Thèse. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues, le 16 Juin 1970, devant la Commission d'Examen :

Mme M.L. DUBREIL JACOTIN

Président

MM. J. DIXMIER

M. SCHÜTZENBERGER

Examineurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Klaus KEIMEI

1^{re} Thèse. — Représentation des groupes et d'anneaux réductibles par des actions
dans des faisceaux
2^e Thèse. — Propositions nouvelles par la méthode



Soutenance le 18 juin 1970 devant la Commission d'Examen :

Mme M. L. DUBREIL JACOTIN Présidente

M. J. DIXMIER

Rapporteur

M. SCHÜTZENBERGER

REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX RETICULES
PAR DES SECTIONS DANS DES FAISCEAUX

par Klaus KEIMEL

Je remercie vivement Mme DUBREIL-JACOTIN qui m'a encouragé à écrire ce travail, M. DIXMIER qui a bien voulu rapporter cette thèse et M. SCHÜTZENBERGER qui m'a donné le sujet de ma deuxième thèse, ainsi que mes collègues A. BIGARD et S. WOLFENSTEIN pour de nombreuses conversations utiles.

Je tiens à remercier chaleureusement M. K.H. HOFMANN (Tulane University) dont les idées sont à l'origine de ce travail et qui n'a jamais ménagé son temps ni ses conseils à l'égard de mon travail.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'établir une théorie de représentation pour les anneaux réticulés et d'en donner des applications.

Nombreux sont les auteurs qui ont donné des représentations de groupes réticulés archimédiens et d'anneaux de fonctions archimédiens au moyen de fonctions continues définies sur certains espaces topologiques à valeurs dans la droite réelle achevée, par exemple D.G. Johnson [21], D. Papert [27], J. Kist [25], J.S. Bernau [1], B.Z. Vulikh [41]. (Nous appelons anneau de fonctions, ou simplement f-anneau, tout anneau réticulé, produit sous-direct d'anneaux totalement ordonnés.) Les méthodes utilisées par ces auteurs ne peuvent plus être appliquées aux groupes réticulés non-archimédiens ni aux anneaux réticulés en général.

Nous cherchons à représenter les anneaux réticulés par des sections de certains faisceaux. Les méthodes que nous utilisons ont été développées par J. Dauns et K.H. Hofmann [11], [12] ainsi que par R.S. Pierce [28] dans la théorie des anneaux (non réticulés). Kist [42], Ch. Mulvey [43] et S. Teleman [34], [35], [36], [37] ont utilisé ces mêmes méthodes de représentation.

Le problème principal que nous nous sommes posé est le suivant :

Etant donné un anneau réticulé A , trouver canoniquement un espace topologique compact BA et un faisceau $\mathcal{F}^B(A)$ d'anneaux réticulés de base BA , tels que A soit isomorphe à l'anneau

réticulé $\Gamma \mathcal{F}^B(A)$ de toutes les sections (globales et continues) de $\mathcal{F}^B(A)$.

Ce problème est résolu en toute généralité.

Une note de J.R. Isbell [18] a été extrêmement utile pour la solution du problème. Isbell a associé fonctoriellement à tout groupe réticulé commutatif un espace topologique compact. La construction d'Isbell n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de A . (Ici on appelle idéal tout noyau d'un homomorphisme de groupes (respectivement d'anneaux) réticulés.) Généralisant la construction d'Isbell, nous exposons dans le deuxième chapitre une construction qui permet d'associer canoniquement à tout treillis distributif pseudo-complémenté, un espace topologique compact. Le treillis des idéaux d'un anneau réticulé A étant distributif et pseudo-complémenté, cette construction nous permet d'associer à tout anneau réticulé A un espace compact BA . Si l'on définit les morphismes d'anneaux réticulés d'une manière appropriée, B est un foncteur. Nous montrons aussi que BA n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech de l'espace des idéaux irréductibles de A , muni de la topologie de Zariski. Dans le cas particulier où A est l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace topologique X , l'espace BA est le compactifié de Stone-Čech de X .

Sur cet espace BA nous construisons un faisceau $\mathcal{F}^B(A)$ d'anneaux réticulés tel que A soit isomorphe à l'anneau réticulé $\Gamma \mathcal{F}^B(A)$ de toutes les sections de $\mathcal{F}^B(A)$. Si l'on définit les morphismes de manière appropriée, $\mathcal{F}^B$ est un foncteur. Si A est

l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues définies sur un espace compact X , le faisceau $\mathcal{F}^B(A)$ n'est rien d'autre que le faisceau des germes des fonctions réelles continues.

Il y a des anneaux réticulés A d'une structure très riche, dont l'espace BA est réduit à un seul point, par exemple les extensions lexicographiques. Ce phénomène ne peut pas se produire si A est riche en facteurs directs; car les facteurs directs de A correspondent bijectivement aux ouverts fermés de BA . Dans ce sens nous considérons en détail les représentations par sections de plusieurs classes d'anneaux réticulés :

a) Les anneaux réticulés stoniens dans la section III.4 (un anneau réticulé est stonien si tout pseudo-complément dans le treillis des idéaux de A est un facteur direct; les anneaux de fonctions complets ou orthocomplets sont des exemples d'anneaux stoniens);

b) Les anneaux réticulés projetables dans la section III.5 (un anneau réticulé est projectable si le pseudo-complément de tout idéal principal est un facteur direct; les anneaux de fonctions σ -complets sont projetables);

c) Les anneaux réticulés quasi-réguliers dans la section III.9 (un anneau réticulé est quasi-régulier si tout idéal principal est un facteur direct).

Les anneaux réticulés quasi-réguliers correspondent aux anneaux biréguliers dans la théorie des anneaux. Notre théorème de représentation III.9.8 correspond au théorème de représentation d'anneaux biréguliers de Bourbaki [7], p. 173, et de Dauns et Hofmann [11]. Les groupes hyper-archimédiens de Bigard [3] sont quasi-réguliers.

Déjà Isbell a donné deux autres classes d'anneaux réticulés pour lesquelles l'espace BA n'est pas trivial :

d) Si A est un groupe réticulé abélien ayant une unité forte, BA est homéomorphe à l'espace des idéaux maximaux de A , muni de la topologie de Zariski (voir section III.6).

e) Si A est un anneau de fonctions, l'espace des idéaux maximaux dominés est homéomorphe à un sous-espace ouvert de BA . (Un idéal maximal I de A est dit dominé s'il existe un élément d dans A n'appartenant pas à I , vérifiant $d^2 + I \subseteq d + I$. Voir section III.7.)

Nous donnons une généralisation du premier cas et étudions le faisceau $\mathcal{T}^B(A)$ dans les deux cas.

Les applications que nous donnons de cette théorie de représentation concernent surtout les anneaux de fonctions. Nous montrons que tout anneau de fonctions admet une extension stonienne minimale et une extension orthocomplète minimale ; de plus, ces extensions sont uniques dans un certain sens. Ainsi nous précisons des résultats de Veksler [40] et Bernau [2]. Nous généralisons aux idéaux dominés un certain nombre de résultats de Henriksen et Isbell [17] sur les idéaux supermodulaires des anneaux de fonctions. Nous montrons par exemple, que dans un anneau de fonctions, tout idéal engendré par un élément d vérifiant $d^2 \subseteq d \subseteq 0$ est un facteur direct. Enfin nous généralisons la notion d'anneau de fonctions archimédien. Nous dirons qu'un anneau de fonctions est quasi-archimédien si pour tout idéal $I \neq \{0\}$ et pour tout élément a , il existe $b \in I$ tel que $b \nsubseteq a$. Nous montrons que tout anneau de fonctions quasi-archimédien est un produit sous-

direct d'un anneau réticulé archimédien B tel que $B^2 = \{0\}$ et d'un anneau de fonctions $\mathcal{J}$ -semisimple. (Un anneau de fonctions est dit $\mathcal{J}$ -semisimple si l'intersection de ses idéaux maximaux dominés est réduite à zéro.) Ce résultat permet de caractériser les anneaux de fonctions $\mathcal{J}$ -semisimples comme les anneaux de fonctions n'admettant aucun idéal infinitésimal non nul. (cf. III.8).

Pour inclure aussi les groupes réticulés non commutatifs dans cette théorie de représentation, nous introduisons la notion d'annéloïde réticulé. Un annéloïde réticulé est un groupe réticulé non nécessairement commutatif, noté additivement, muni d'une multiplication distributive par rapport à l'addition et vérifiant la règle habituelle d'isotonie. Cette notion ne comporte aucun intérêt en elle-même. Mais elle permet d'établir la théorie de représentation simultanément pour les groupes réticulés non commutatifs et les anneaux réticulés.

Beaucoup de propriétés des annéloïdes réticulés que nous utilisons, ne dépendent que du treillis des idéaux. C'est pour cette raison que nous avons anticipé dans un premier chapitre les raisonnements qui ne concernent que les treillis et en particulier les éléments irréductibles des treillis algébriques distributifs.

La terminologie en ce qui concerne les treillis est celle de Birkhoff [4], en ce qui concerne la topologie, celle de Bourbaki [6]; en particulier, un espace topologique compact est toujours séparé, sinon on parle d'espace quasi-compact.

Chapitre I

ELEMENTS PREMIERS D'UN TREILLIS

Dans ce chapitre nous étudierons les éléments premiers d'un treillis.

La première section contient quelques définitions et préliminaires.

Dans la deuxième section nous étudions la topologie de Zariski sur des parties de l'ensemble des éléments premiers d'un treillis T et les relations entre cette topologie et la structure du treillis T . Cette section ne contient rien de nouveau ; mais l'auteur ne connaît pas de référence qui fournirait les résultats dans le langage et la généralité voulus. La topologie de Zariski est couramment utilisée dans la théorie des anneaux (voir par exemple Jacobson [19], Bourbaki [7]). Dans la théorie des groupes réticulés elle a été étudiée surtout par F. Sik [31], [32], ainsi que par Henriksen et Isbell [17]. L'exposé de la topologie de Zariski le plus proche du notre semble dû à P. Samuel [29].

Dans la section 3 nous traitons la notion de compacité. La notion de valeur que nous utilisons est empruntée à la théorie des groupes réticulés (cf. [9], p. 26). La proposition 3.5 a été formulée par R.L. Blair [5] dans le cas du treillis des idéaux d'un anneau. On la retrouve aussi presque en totalité dans [4], p. 128 et 139.

Dans la section 4, nous caractérisons les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet, en particulier les éléments premiers minimaux. Les résultats de cette section peuvent être considéré comme des généralisations de propriétés de groupes réticulés (cf. Byrd [8], Conrad [9], p. 42 - 45).

La notion d'élément germinal associé à un élément premier dans la section 5 généralise la notion d'idéal germinal associé à un idéal irréductible d'un f-anneau [22]. Pour les idéaux supermodulaires maximaux d'un f-anneau, cette notion a été introduite par Henriksen et Isbell [17] qui a leur tour ont généralisé les idéaux des fonctions réelles continues s'annulant dans un voisinage d'un point donné d'un espace topologique. Certains de nos résultats généralisent des propriétés du treillis des ℓ -sous-groupes convexes d'un groupe réticulé (cf. [9], p. 43 - 45).

La dernière section de ce chapitre est consacrée à trois classes particulières de treillis: les treillis de Stone, les treillis projectables et les treillis plats. Dans ces cas, l'ensemble des éléments premiers a une structure simple. Bigard [3] a étudié les groupes réticulés dont le treillis des ℓ -sous-groupes convexes appartient à une de ces trois classes.

1. Définitions et propriétés élémentaires.

Soit T un treillis. Nous désignerons par $\vee$ et $\wedge$ les opérations "borne supérieure" et "borne inférieure" dans T . Si T admet un plus petit élément, nous le désignerons par 0 ; et si T admet un plus grand élément, nous le désignerons par 1 .

1.1. - Un élément x de T est dit premier si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 \nsubseteq x$ pour tout couple t_1, t_2 d'éléments de T tels que $t_1 \nsubseteq x$ et $t_2 \nsubseteq x$. Si C est une chaîne non vide d'éléments premiers d'un treillis complet, $x_0 = \bigwedge_{x \in C} x$ est aussi un élément premier. Utilisant l'axiome de Zorn, on en déduit que tout élément premier d'un treillis complet majore au moins un élément premier minimal.

1.2. - Un élément x d'un treillis T est dit irréductible si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 = x$ pour deux éléments t_1, t_2 de T entraîne $t_1 = x$ ou $t_2 = x$. Tout élément premier est irréductible. Inversement, si T est un treillis distributif, tout élément irréductible est premier. Un élément maximal d'un treillis est toujours irréductible. Donc, dans un treillis distributif, les éléments maximaux sont premiers. (Si T possède un plus grand élément 1 , "maximal" signifie "maximal dans $T \setminus \{1\}$ ".)

1.3. - Soit T un treillis ayant un plus petit élément 0 . Soit $t \in T$. Si l'ensemble des s dans T tels que $s \wedge t = 0$ admet un plus grand élément, on appelle cet élément pseudo-complément de t . On le note t^+ . On dit que le treillis T est un treillis pseudo-complémenté si tout élément de T admet un pseudo-complément.

Nous utiliserons souvent le théorème de Glivenko (cf. [4], p. 130;

voir aussi Samuel [29], Frink [14], Varlet [38]):

Soit T un treillis pseudo-complémenté. Alors $t^+ = t^{+++}$ pour tout $t \in T$; l'application $t \mapsto t^{++}$ est une fermeture dans T , dont les fermés sont exactement les pseudo-compléments. Les pseudo-compléments dans T forment un treillis de Boole $\mathcal{B}$, image homomorphe du treillis T . Le complément d'un élément a de $\mathcal{B}$ est a^+ . Le treillis de Boole $\mathcal{B}$ est complet si T est complet.

Puisque $t \mapsto t^{++}$ est une fermeture, la borne inférieure dans $\mathcal{B}$ d'une famille quelconque de pseudo-compléments coïncide avec la borne inférieure de cette famille dans T . Mais si a et b sont dans $\mathcal{B}$, $a \vee b$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{B}$. On désignera par $a \nabla b$ la borne supérieure de a et b dans $\mathcal{B}$. Remarquons que

$$a \nabla b = (a \vee b)^{++}.$$

Par définition, un treillis pseudo-complémenté possède toujours un plus petit élément 0 . Il possède aussi un plus grand élément, à savoir $1 = 0^+$.

1.4. - On appelle treillis de Brouwer un treillis T tel que, quels que soient t et c dans T , l'ensemble des s dans T tels que $t \wedge s \leq c$, possède un plus grand élément. Un treillis complet T est un treillis de Brouwer si, et seulement si, T est $\wedge$ -distributif général, c'est à dire si, et seulement si, pour tout élément t de T et pour toute famille (t_μ) d'éléments de T ,

$$t \wedge \left(\bigvee_{\mu} t_{\mu} \right) = \bigvee_{\mu} (t \wedge t_{\mu})$$

(cf. [4], p. 128). En particulier, un treillis de Brouwer est distributif et, s'il possède un plus petit élément, il est pseudo-complémenté.

1.5. - EXEMPLE (cf. [4], p. 216). Soit X un espace topologique. L'ensemble $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X est un treillis de Brouwer complet. En particulier, $\mathcal{O}_X$ est un treillis distributif et pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans $\mathcal{O}_X$ sont exactement les ouverts réguliers, c'est à dire les ouverts qui sont égal à l'intérieur de leur adhérence. Si U est un ouvert, le pseudo-complément $U^\perp$ est égal à $X \setminus \bar{U}$, où $\bar{U}$ désigne l'adhérence de U . Le théorème de Glivenko montre que les ouverts réguliers de X forment un treillis de Boole complet que l'on notera $\mathcal{R}_X$.

L'application $U \mapsto X \setminus U$ est un anti-isomorphisme du treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X sur le treillis des fermés de X . Si U est un ouvert régulier, $X \setminus U$ est un fermé régulier, c'est à dire que $X \setminus U$ est l'adhérence de son intérieur; inversement, tout fermé régulier de X est de la forme $X \setminus U$ avec $U \in \mathcal{R}_X$. Il s'ensuit que les fermés réguliers de X forment un treillis de Boole complet anti-isomorphe à $\mathcal{R}_X$.

2. Espaces d'éléments premiers.

Soit T un treillis complet. Soit X une partie de l'ensemble des éléments premiers de T . Pour tout $t \in T$, soit

$$S_X(t) = \{x \in X; t \not\leq x\},$$

$$Z_X(t) = \{x \in X; t \leq x\} = X \setminus S_X(t).$$

S'il n'y a pas d'erreur possible, nous écrirons simplement $S(t)$ et $Z(t)$. Pour toute famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ d'éléments de T , dont la borne supérieure existe, on a :

$$(1) \quad S\left(\bigvee_{\mu \in I} t_{\mu}\right) = \bigcup_{\mu \in I} S(t_{\mu}) ,$$

$$(2) \quad Z\left(\bigvee_{\mu \in I} t_{\mu}\right) = \bigcap_{\mu \in I} Z(t_{\mu}) .$$

Soient t_1 et t_2 deux éléments de T . Un élément $x \in X$ appartient à $S(t_1 \wedge t_2)$ si, et seulement si, $t_1 \wedge t_2 \nless x$; puisque x est premier, cela s'écrit aussi $t_1 \nless x$ et $t_2 \nless x$, c'est à dire que $x \in S(t_1)$ et $x \in S(t_2)$; donc :

$$(3) \quad S(t_1 \wedge t_2) = S(t_1) \cap S(t_2) ,$$

$$(4) \quad Z(t_1 \wedge t_2) = Z(t_1) \cup Z(t_2) .$$

La relation (3) montre que les ensembles de la forme $S(t)$, $t \in T$, forment une base d'ouverts d'une topologie sur T .

DEFINITION 2.1. - La topologie sur X , dont les ensembles de la forme $S_X(t)$, $t \in T$, forment une base, est appelée topologie de Zariski.

Sur un ensemble X d'éléments premiers de T , nous ne considérerons jamais de topologie autre que la topologie de Zariski.

DEFINITION 2.2. - On appelle espace d'éléments premiers de T tout ensemble d'éléments premiers de T muni de la topologie de Zariski.

NOTATION. - On désigne par ξT l'espace de tous les éléments premiers, par μT l'espace des éléments premiers maximaux et par πT l'espace des éléments premiers minimaux de T .

PROPRIETES 2.3. - Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T .

(a) $t \longmapsto S(t)$ est un homomorphisme surjectif du treillis T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X d'après (1) et (3).

(b) Une partie de X est fermée si, et seulement si, elle est de la forme $Z(t)$, $t \in T$.

(c) Si Y est une partie de X , la topologie de Zariski sur Y coïncide avec la topologie induite sur Y par la topologie de Zariski sur X .

(d) X est un espace de Kolmogoroff ($= T_0$), c'est à dire que pour deux éléments distincts quelconques de X , il existe un ouvert contenant l'un de ces deux éléments, mais pas l'autre. (En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X , on a par exemple $x \not\leq y$; il s'ensuit que l'ouvert $S(x)$ contient y , mais pas x .)

(e) X est un espace accessible ($= T_1$) si, et seulement si, les éléments de X sont deux à deux non comparables. (Un espace topologique est dit accessible si, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de X , il existe un ouvert contenant x , mais pas y ; cette propriété se démontre comme (d).)

(f) Pour que X soit un espace topologique séparé ($= T_2$), il suffit que pour tout couple x_1, x_2 d'éléments premiers distincts de X , il existe t_1 et t_2 dans T tels que

$$t_1 \wedge t_2 = 0, \quad t_1 \not\leq x_1, \quad t_2 \not\leq x_2.$$

Si $\bigwedge_{x \in X} x = 0$, cette condition est aussi nécessaire.

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T . D'après (2) et (4), $t \mapsto Z(t)$ est un anti-homomorphisme du treillis T sur le treillis des fermés de X . On a en particulier:

$$(5) \quad t_1 \leq t_2 \text{ entraîne } Z(t_1) \supseteq Z(t_2).$$

Définissons inversement une application R du treillis $\mathcal{F}(X)$ des parties de X dans T par:

$$R(Y) = \bigwedge_{y \in Y} y \text{ quel que soit } Y \subseteq X .$$

Cette application vérifie :

$$(6) \quad Y_1 \subseteq Y_2 \text{ entraîne } R(Y_1) \supseteq R(Y_2) .$$

On a de plus :

$$(7) \quad t \subseteq RZ(t) \text{ quel que soit } t \in T ,$$

$$(8) \quad Y \subseteq ZR(Y) \text{ quel que soit } Y \subseteq X .$$

Les relations (5), (6), (7), (8) montrent que les applications $Z: T \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ et $R: \mathcal{P}(X) \longrightarrow T$ constituent une correspondance de Galois entre T et $\mathcal{P}(X)$.

La théorie générale des correspondances de Galois (cf. [4], p. 124) permet d'affirmer :

$$(9) \quad RZR = R \text{ et } ZRZ = Z .$$

De plus, RZ et ZR sont des fermetures respectivement dans T et $\mathcal{P}(X)$. Notons $\bar{t} = RZ(t)$ et $\bar{Y} = ZR(Y)$ les fermés associés respectivement aux éléments t de T et aux parties Y de X . Les applications R et Z induisent des anti-isomorphismes mutuellement réciproques entre le treillis complet $\bar{T} = \{\bar{t}; t \in T\}$ et le treillis complet des fermés de $\mathcal{P}(X)$. Notons que les fermés de $\mathcal{P}(X)$ sont exactement les parties fermées de X pour la topologie de Zariski d'après (9) et 2.3b. Puisque $F \longmapsto X \setminus F$ est un anti-isomorphisme du treillis des fermés de X sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X , $t \longmapsto S(t)$ est un isomorphisme du treillis $\bar{T}$ des fermés de T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X . Par conséquent, $\bar{T}$ est un treillis de Brouwer complet.

Appliquons ces raisonnements dans deux cas : Prenons d'abord $X = \{T\}$ et supposons que tout élément de T soit la borne inférieure

d'une famille d'éléments premiers. Alors $T = \bar{T}$; donc :

PROPOSITION 2.4. - Si tout élément d'un treillis complet T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors T est un treillis de Brouwer.

Dans le deuxième cas les hypothèses sont moins fortes. Soit $X = \xi T$ et supposons que $\bigwedge_{x \in \xi T} x = 0$. Dans ce cas on a $\bar{0} = RZ(0) = 0$. Montrons que T est pseudo-complémenté : Soit t un élément de T . Pour tout élément s de T tel que $s \wedge t = 0$, on a $\bar{s} \wedge \bar{t} = \bar{0} = 0$. On en déduit que $s \leq \bar{s} \leq t^\perp$, où $t^\perp$ désigne le pseudo-complément de t dans $\bar{T}$. Par conséquent, $t^\perp$ est aussi le pseudo-complément de t dans T . Nous avons :

PROPOSITION 2.5. - Un treillis complet T dont le plus petit élément est la borne inférieure de la famille des éléments premiers est pseudo-complémenté.

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T tel que $\bigwedge_{x \in X} x = 0$. D'après la proposition précédente, T est pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans T forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}$ d'après le théorème de Glivenko (1.3). Nous avons les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS 2.6. - (a) $a \mapsto S(a)$ est un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des ouverts réguliers de X .

(b) $a \mapsto Z(a)$ est un anti-isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole des fermés réguliers de X .

(c) Pour tout $t \in T$, $S(t^\perp) \cup S(t^{\perp\perp})$ est partout dense dans X et $S(t^\perp) \cap S(t^{\perp\perp}) = \emptyset$.

(d) Pour tout $t \in T$, $t^\perp = RS(t)$; en particulier, tout pseudo-complément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers appartenant à X .

(e) $U \mapsto R(U)^\perp$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{B}$.

(f) Pour tout $t \in T$, $Z(t^\perp)$ est l'adhérence de $S(t)$ et $S(t^\perp)$ est l'intérieur de $Z(t)$.

(g) Pour tout $t \in T$ et tout $x \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $Z(t)$ est un voisinage de x ;

(ii) $Z(t^{\perp\perp})$ est un voisinage de x ;

(iii) $x \in S(t^\perp)$.

Démonstration. (a) Puisque l'application $t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de $\bar{T}$ sur $\mathcal{O}_X$, elle induit un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments de $\bar{T}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des pseudo-compléments de $\mathcal{O}_X$.

(b) est une conséquence immédiate de (a).

(c) D'après (a), $S(t^{\perp\perp}) = S(t^\perp)^\perp$; et pour tout ouvert U d'un espace topologique, $U \cup U^\perp$ est partout dense et $U \cap U^\perp = \emptyset$.

(d) Si $t \not\leq x \in X$, alors $t^\perp \leq x$ puisque x est premier; donc $S(t) \subseteq Z(t^\perp)$, ce qui entraîne $RS(t) \geq RZ(t^\perp) = t^\perp$. Inversement, $RS(t) \leq x$ pour tout $x \in X$ tel que $t \not\leq x$; par suite,

$$RS(t) \wedge t \leq x \text{ pour tout } x \in X .$$

On en déduit que $RS(t) \wedge t = 0$ et par conséquent $RS(t) \leq t^\perp$.

(e) Soit U un ouvert régulier de X . D'après (a), il existe $a \in \mathcal{B}$ tel que $U = S(a)$; donc $R(U)^\perp = RS(a)^\perp = a^{\perp\perp} = a$.

(f) L'adhérence de $S(t)$ est $ZRS(t)$; d'après (d), $ZRS(t) = Z(t^\perp)$. L'intérieur de $Z(t)$ est $X \setminus ZR(X \setminus Z(t)) = SRS(t) = S(t^\perp)$.

(g) résulte de (f) ; car d'après (f), l'intérieur de $Z(t)$ ainsi que de $Z(t^{\perp\perp})$ est égal à $S(t^\perp)$.

3. Compacité.

Soit T un treillis. Un élément k de T est dit compact si la condition suivante est vérifiée : Toute famille d'éléments de T dont la borne supérieure existe et majore k , contient une famille finie dont la borne supérieure majore k . Cette condition est équivalente à la condition suivante : Tout idéal de T , dont la borne supérieure existe et majore k , contient k .

Les éléments compacts d'un treillis T forment un $\vee$ -sous-demi-treillis K de T . Si T admet un plus petit élément 0 , cet élément est compact. Mais K n'est pas un treillis en général.

Soit k un élément compact de T . On appelle valeur de k tout élément maximal dans la famille des éléments de T ne majorant pas k . Par $V(k)$ on désigne l'ensemble des valeurs de k . Un élément de T est dit semi-maximal s'il appartient à un ensemble $V(k)$.

Si T est un treillis complet, la famille des éléments de T ne majorant pas un élément compact k donné, est inductive. Par conséquent :

LEMME 3.1. - Soit k un élément compact d'un treillis complet T . Alors tout élément de T ne majorant pas k est majoré par une valeur de k .

Si v est une valeur de k , l'élément $v^* = v \vee k$ est le plus petit élément de la famille des majorants stricts de v . Donc v est irréductible. Dans un treillis distributif, tout élément semi-maximal est donc premier, et nous pouvons parler de l'espace des valeurs de k .

PROPOSITION 3.2. - Soit k un élément compact d'un treillis complet distributif. Alors l'espace $V(k)$ des valeurs de k et l'espace $S(k)$ des éléments premiers ne contenant pas k sont quasi-compacts.

Démonstration. Soit $X = V(k)$ ou $X = S(k)$. Soit $(U_\mu)_\mu$ un recouvrement ouvert de X . Tout ouvert U_μ est de la forme $S_X(t_\mu)$ pour un certain $t_\mu \in T$. Puisque

$$X = \bigcup_\mu U_\mu = \bigcup_\mu S_X(t_\mu) = S_X(\bigvee_\mu t_\mu),$$

l'élément $\bigvee_\mu t_\mu$ n'est majoré par aucune valeur de k . D'après le lemme 3.1, on a donc $k \not\leq \bigvee_\mu t_\mu$. Puisque k est compact, $(t_\mu)_\mu$ contient une sous-famille finie $t_1, \dots, t_n$ telle que $k \not\leq t_1 \vee \dots \vee t_n$. Par conséquent,

$$X = S_X(t_1 \vee \dots \vee t_n) = S_X(t_1) \cup \dots \cup S_X(t_n),$$

c'est à dire que $(U_i)_{i=1, \dots, n}$ est un recouvrement fini de X .

Si le plus grand élément 1 d'un treillis complet distributif est compact, alors $V(1) = \mu T$ et $S(1) = \xi T$. D'après 3.1 et 3.2, nous avons donc :

PROPOSITION 3.3. - Soit T un treillis complet distributif, dont le plus grand élément 1 est compact. Alors tout élément différent de 1 est majoré par un élément maximal. L'espace μT des éléments maximaux et l'espace ξT des éléments premiers sont quasi-compacts.

Un treillis T est dit algébrique si tout élément de T est la borne supérieure d'une famille d'éléments compacts.

EXEMPLE 3.4. - Soit A une algèbre universelle et $\mathcal{T}(A)$ le

treillis complet des relations de congruence dans A . Les éléments compacts de $\mathcal{J}(A)$ sont les congruences qui ont un nombre fini de générateurs; $\mathcal{J}(A)$ est un treillis algébrique (cf. [4], p. 189). Dans le treillis des idéaux d'un anneau, les éléments compacts sont les idéaux engendrés par un nombre fini d'éléments. Dans le treillis des idéaux d'un ν -demi-treillis, les éléments compacts sont les idéaux principaux.

Dans un treillis algébrique, la distributivité est équivalente à des propriétés qui sont, en général, plus fortes :

PROPOSITION 3.5. - Pour un treillis algébrique complet, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) T est distributif.
- (b) Tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.
- (c) T est un treillis de Brouwer.
- (d) T est $\wedge$ -distributif général.

Démonstration. (a) $\implies$ (b) : Il suffit de montrer que dans un treillis algébrique complet, tout élément t est la borne inférieure d'une famille d'éléments semi-maximaux. Soit t' la borne inférieure de la famille de tous les éléments semi-maximaux majorant t . Supposons que $t < t'$. Puisque T est algébrique, il existe un élément compact $k \leq t'$ tel que $k \not\leq t$. D'après 3.1, il y a une valeur v de k telle que $t \leq v$. Il s'ensuit que v est un élément semi-maximal tel que $t \leq v$ et $v \not\leq t'$, ce qui est absurde.

(b) entraîne (c) d'après la proposition 2.4.

(c) $\implies$ (d) : Soit $(t_\mu)_\mu$ une famille d'éléments de T et soit

$t' = \bigvee_{\mu} (s \wedge t_{\mu})$. On a toujours $t' \leq s \wedge (\bigvee_{\mu} t_{\mu})$. Puisque $s \wedge t_{\mu} \leq t'$ et puisque T est un treillis de Brouwer, on a aussi $s \wedge (\bigvee_{\mu} t_{\mu}) \leq t'$.

Il est évident que (d) entraîne (a).

Une partie H de T est appelée base compacte de T si tout élément de H est compact et si tout élément de T est la borne supérieure d'une famille d'éléments de H .

Soit H une base compacte de T . Soit X un espace d'éléments premiers de T ; alors pour tout $t \in T$, l'ouvert $S_X(t)$ est la réunion d'ouverts de la forme $S_X(h)$, $h \in H$. Notons qu'un élément x de T est premier si et seulement si pour deux éléments quelconques h_1 et h_2 de T , $h_1 \not\leq x$ et $h_2 \not\leq x$ entraîne $h_1 \wedge h_2 \not\leq x$. En effet, si x est premier, cette condition est vérifiée. Supposons inversement que cette condition soit vérifiée. Soient t_1 et t_2 deux éléments de T tels que $t_1 \not\leq x$ et $t_2 \not\leq x$. Puisque H est une base compacte, il existe h_1 et h_2 dans H tels que $h_1 \leq t_1$, $h_2 \leq t_2$ et $h_1 \not\leq x$, $h_2 \not\leq x$, d'où $h_1 \wedge h_2 \leq t_1 \wedge t_2$ et $h_1 \wedge h_2 \not\leq x$ et par suite $t_1 \wedge t_2 \not\leq x$.

Si $\mathcal{I}(A)$ est le treillis des congruences d'une algèbre universelle A , les congruences principales forment une base compacte de $\mathcal{I}(A)$.

4. Éléments premiers et filtres premiers.

Soit E un $\vee$ -demi-treillis ayant un plus petit élément 0 . On appelle filtre toute partie F de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$(F_1) \quad 0 \notin F ;$$

$$(F_2) \quad F \text{ est filtrant inférieurement;}$$

$$(F_3) \quad \text{Si } k \in F, k' \in E \text{ et } k \leq k', \text{ alors } k' \in F .$$

Un filtre F de E est dit premier, s'il vérifie

$$(F_4) \quad E \setminus F \text{ est un } \vee\text{-sous-demi-treillis de } E .$$

La famille des filtres dans E est inductive. Les filtres maximaux sont appelés ultrafiltres.

Soit T un treillis algébrique complet. L'ensemble K des éléments compacts est un $\vee$ -sous-demi-treillis de T . Pour tout filtre premier F de K , soit

$$\pi(F) = \bigvee_{k \in K \setminus F} k .$$

Pour tout élément x de T , soit

$$\varphi(x) = \{k \in K; k \not\leq x\} .$$

PROPOSITION 4.1. - Pour tout filtre premier F de K , $\pi(F)$ est un élément premier de T , et pour tout élément premier x de T , $\varphi(x)$ est un filtre premier de K . De plus, φ et π sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premiers de T et l'ensemble des filtres premiers de K .

Démonstration. Soit x un élément premier de T . Evidemment, $\varphi(x)$ vérifie $(F_1), (F_3), (F_4)$. Si k_1 et k_2 sont deux éléments compacts non majorés par x , $k_1 \wedge k_2$ n'est pas majoré par x ,

puisque x est premier. Puisque $k_1 \wedge k_2$ est la borne supérieure d'une famille d'éléments compacts, il existe un élément compact k tel que $k \leq k_1 \wedge k_2$ et $k \not\leq x$. Par suite, (F_2) est aussi vérifié, et $\varphi(x)$ est un filtre premier de K .

Puisque x est la borne supérieure de la famille des éléments compacts k tels que $k \leq x$, on a bien $\pi\varphi(x) = x$.

Soit maintenant F un filtre premier de K . L'élément $\pi(F)$ est la borne supérieure des éléments compacts non dans F . Si un élément compact k est majoré par $\pi(F)$, il est donc majoré par un élément compact n'appartenant pas à F , ce qui entraîne que k n'appartient pas à F . Par conséquent, $\varphi\pi(F) = F$. De plus, $\pi(F)$ est premier. En effet, soient t_1 et t_2 deux éléments de T non majorés par $\pi(F)$. Il existe k_1 et k_2 dans $\varphi\pi(F) = F$ tels que $k_1 \leq t_1$ et $k_2 \leq t_2$. Puisque F est un filtre, il existe dans F un élément $k \leq k_1 \wedge k_2$. Puisque $k \not\leq \pi(F)$, on a aussi $t_1 \wedge t_2 \not\leq \pi(F)$.

Il est évident que φ et π inversent l'ordre, c'est à dire que $x_1 \leq x_2$ pour deux éléments premiers de T entraîne $\varphi(x_1) \supseteq \varphi(x_2)$. On a donc :

COROLLAIRE. - φ et π sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premiers minimaux de T et l'ensemble des filtres premiers maximaux de K .

En général, on ne peut rien dire sur l'existence d'éléments premiers dans un treillis algébrique complet. Dans la proposition 3.5 nous avons vu que, dans un treillis algébrique complet distributif, tout élément est la borne inférieure d'une certaine famille d'éléments premiers. Maintenant nous allons considérer une autre classe de treillis algébriques qui possède "suffisamment" d'éléments premiers.

Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0 . Nous dirons que E est O-distributif si, pour tout $t_1, t_2, t \in E$,

$$t_1 \wedge t = 0 \text{ et } t_2 \wedge t = 0 \text{ entraîne } (t_1 \vee t_2) \wedge t = 0.$$

Nous dirons que E est O-distributif général si, pour tout $t \in E$ et pour toute famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ d'éléments de E tels que $t \wedge t_\mu = 0$ quel que soit $\mu \in I$,

$$t \wedge \left(\bigvee_{\mu} t_\mu \right) = 0,$$

pourvu que $\bigvee_{\mu} t_\mu$ existe.

LEMME 4.2. - Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0 . Si E est O-distributif, tout ultrafiltre F de E est premier.

Démonstration. Un élément k de E n'appartient pas à l'ultrafiltre F de E si, et seulement si, il existe k' dans F tel que $k \wedge k' = 0$. Si k_1 et k_2 sont deux éléments de $E \setminus F$, il existe donc k_1' et k_2' dans F tels que $k_1 \wedge k_1' = k_2 \wedge k_2' = 0$. Puisque E est O-distributif, $(k_1 \vee k_2) \wedge (k_1' \wedge k_2') = 0$. Puisque $k_1' \wedge k_2'$ appartient à F , $k_1 \vee k_2$ n'appartient pas à F . Donc F est un filtre premier.

DEFINITION 4.3. - Un treillis T est appelé arithmétique, si T est un treillis algébrique et si l'ensemble K des éléments compacts est un sous-treillis O-distributif de T .

D'après 4.2 et le corollaire de 4.1 on a le théorème suivant :

THEOREME 4.4. - Soit T un treillis arithmétique complet. Alors φ et π sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des ultrafiltres dans K et l'ensemble πT des éléments premiers minimaux de T .

Ce théorème a un série des conséquences :

COROLLAIRE 1. - Pour un treillis algébrique complet T , dont l'ensemble K des éléments compacts est un sous-treillis, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) T est pseudo-complémenté ;
- (b) T est 0-distributif général ;
- (c) T est 0-distributif ;
- (d) K est 0-distributif ;
- (e) 0 est la borne inférieure de la famille πT des éléments premiers minimaux.

Il est évident que $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d)$. D'après la proposition 2.5, $(e) \implies (a)$. L'implication $(d) \implies (e)$ est une conséquence du théorème 4.4 ; car pour tout élément compact k différent de 0 , il existe un ultrafiltre F contenant k et on a $k \not\leq \pi(F)$. Par conséquent, la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux est 0 .

Maintenant nous allons supposer que T est un treillis arithmétique complet. D'après le corollaire 1, T est pseudo-complémenté.

COROLLAIRE 2. - Un élément premier x d'un treillis arithmétique complet T est premier minimal si, et seulement si, pour tout élément compact k de T , ou bien $k \leq x$ ou bien $k^\perp \leq x$.

Démonstration. Supposons que x est premier minimal et k un élément compact. Si $k \not\leq x$, alors $k^\perp \leq x$ puisque x est premier. Si $k \leq x$, il existe $k' \in \varphi(x)$ tel que $k \wedge k' = 0$ puisque $\varphi(x)$ est un ultrafiltre. Donc $k' \leq k^\perp$ et $k' \not\leq x$. Donc $k^\perp \not\leq x$.

Supposons inversement que x est un élément premier de T tel que pour tout élément compact k , $k \not\leq x$ ou $k^\perp \not\leq x$. Montrons que le filtre premier $\phi(x)$ est un ultrafiltre. En effet, si k est un élément compact non dans $\phi(x)$, alors $k \leq x$ et par suite $k^\perp \not\leq x$. Il existe donc un élément compact k' tel que $k' \leq k^\perp$ et $k' \not\leq x$. Donc $k' \in \phi(x)$ et $k \wedge k' = 0$.

COROLLAIRE 3. - Soit x un élément premier minimal d'un treillis arithmétique complet T . Pour tout élément compact k tel que $k \leq x$, on a aussi $k^{\perp\perp} \leq x$.

En effet, $k \leq x$ entraîne $k^\perp \not\leq x$ d'après le corollaire 2. Donc $k^{\perp\perp} \leq x$, puisque x est premier.

COROLLAIRE 4. - Soit T un treillis arithmétique complet. L'espace πT des éléments premiers minimaux est séparé; les ensembles $S_{\pi T}(k)$ k compact, sont ouverts et fermés et ils forment une base de la topologie de πT .

Démonstration. Puisque T est algébrique et puisque K est un sous treillis de T , les ensembles $S_{\pi T}(k)$, $k \in K$, forment une base de la topologie de πT . D'après le corollaire 2, $S_{\pi T}(k) = Z_{\pi T}(k^\perp)$. Donc $S_{\pi T}(k)$ est aussi fermé pour tout élément compact k . Tout espace de Kolmogoroff ayant une base d'ensembles ouverts et fermés est séparé.

EXEMPLE. - Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0 . Supposons que E est 0 -distributif. Alors le treillis T des idéaux E est un treillis arithmétique complet.

5. Élément germinal associé à un élément premier.

Soit T un treillis complet pseudo-complémenté.

DEFINITION 5.1. - Pour tout élément premier x de T , soit

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^+ \not\leq x} t ;$$

on appelle $\gamma(x)$ l'élément germinal associé à x .

PROPRIETES 5.2. - Soit x un élément premier d'un treillis complet pseudo-complémenté T .

a) Puisque $t \leq t^{++}$ et $t^+ = (t^{++})^+$, on a

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^+ \not\leq x} t^{++} .$$

b) Puisque x est premier, $t^+ \not\leq x$ entraîne $t^{++} \leq x$; donc

$$\gamma(x) \leq x .$$

c) $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille de pseudo-compléments filtrant supérieurement. En effet, si $t^+ \not\leq x$ et $s^+ \not\leq x$, alors $s^+ \wedge t^+ \not\leq x$; donc $s^{++} \vee t^{++} = (s^+ \wedge t^+)^+ \leq x$.

d) Pour tout élément compact k de T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad k \leq \gamma(x) \quad ; \quad (ii) \quad k^{++} \leq \gamma(x) \quad ; \quad (iii) \quad k^+ \not\leq x .$$

En effet, puisque $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille filtrante de pseudo-compléments a tels que $a^+ \not\leq x$, la relation $k \leq \gamma(x)$ entraîne l'existence d'un pseudo-complément a tel que $k \leq a$ et $a^+ \not\leq x$. Il s'ensuit que $k^+ \geq a^+ \not\leq x$. Donc (i) entraîne (iii). D'après la définition de $\gamma(x)$, (iii) entraîne (ii). Finalement, (ii) entraîne (i) puisque $k \leq k^{++}$.

e) Si x est un élément premier d'un treillis algébrique complet pseudo-complémenté,

$$(x) = \bigvee_{k^+ \not\leq x} k^{++} = \bigvee_{k \leq \gamma(x)} k^{++} = \bigvee_{k \not\leq x} k^+$$

où la lettre k ne représente que des éléments compacts.

Les deux premières égalités sont claires d'après la définition de $\gamma(x)$ et d). Démontrons la dernière égalité: Soit k_1 compact et $k_1 \leq \gamma(x)$. Alors $k_1^+ \not\leq x$ d'après d). Il existe donc un élément compact k tel que $k \leq k_1^+$ et $k \not\leq x$. On a $k_1 \leq k_1^{++} \leq k^+$. Puisque $k \not\leq x$, on a aussi $k^{++} \not\leq x$ et par suite $k^+ \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigvee_{k_1 \leq \gamma(x)} k_1 \leq \bigvee_{k \not\leq x} k^+ \leq \gamma(x)$.

PROPOSITION 5.3. - Soit T un treillis complet et X un espace d'éléments premiers de T , dont la borne inférieure est 0. Pour tout $x \in X$, $\gamma(x)$ est la borne supérieure des éléments t de T tels que $Z_X(t)$ soit un voisinage de x .

Démonstration. D'après 2.6g, $Z_X(t)$ est un voisinage de x si, et seulement si, $t^+ \not\leq x$.

COROLLAIRE 1. - Supposons que T et X vérifient les hypothèses de 5.3 et que T soit algébrique. Alors pour tout $x \in X$, $\gamma(x)$ est la borne supérieure des éléments compacts k tels que $Z_X(k)$ soit un voisinage de x .

COROLLAIRE 2. - Supposons que T et X vérifient les hypothèses de 5.3 et que X soit un espace séparé. Alors pour tout x dans X , x est le seul élément de X majorant $\gamma(x)$.

En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X , il y a un voisinage fermé V de x ne contenant pas y . Il existe t dans T tel que $V = Z_X(t)$. On a $t \not\leq y$ et d'après la proposition, $t \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) \not\leq y$.

DEFINITION 5.4. - Soit m un élément maximal d'un treillis distributif T . Un élément t de T est appelé m-primaire si $x \leq m$ pour tout élément $x \neq 1$ de T tel que $t \leq x$.

LEMME 5.5. - Soit m un élément maximal d'un treillis algébrique complet distributif. Alors $\gamma(m) \leq t$ pour tout élément m-primaire t .

Démonstration. Tout élément t de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers (3.5). Si t est m-primaire, t est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers x tels que $x \leq m$. Or, si x est un élément premier tel que $x \leq m$, on a $\gamma(m) \leq x$; car si $t^+ \not\leq m$, on a aussi $t^+ \not\leq x$, ce qui entraîne $t \leq x$.

PROPOSITION 5.6. - Soit T un treillis algébrique complet distributif tel que (a) 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T , (b) 1 est un élément compact, (c) l'espace μT des éléments maximaux est séparé. Alors pour tout élément maximal m de T , $\gamma(m)$ est le plus petit élément m-primaire de T et $\gamma(m) = \bigwedge \{p \in \pi T ; p \leq m\}$.

Démonstration. D'après le corollaire 2 de 5.3, $\gamma(m)$ est m-primaire. D'après le lemme 5.4, $\gamma(m)$ est m-primaire minimum.

En particulier, $\gamma(m) \leq x$ pour tout élément premier minimal x tel que $x \leq m$. D'autre part, $\gamma(m)$ est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Puisque tout élément premier majorant $\gamma(m)$ est aussi m -primaire et puisque tout élément premier majore un élément premier minimal, on a bien $\gamma(m) = \bigwedge \{p \in \pi T; p \leq m\}$.

PROPOSITION 5.7. - Soit x un élément premier d'un treillis arithmétique complet. Alors $\gamma(x) = \bigwedge \{p \in \pi T; p \leq x\}$.

Démonstration. Soit p un élément premier minimal majoré par x . Si $t \not\leq x$, alors $t \not\leq p$. Par conséquent, $\gamma(x) \leq p$. Il s'ensuit que $\gamma(x) \leq \bigwedge \{p \in \pi T; p \leq x\}$. Inversement, soit k un élément compact non majoré par $\gamma(x)$. Pour tout élément compact k' tel que $k' \not\leq x$, on a $k \wedge k' > 0$. Il existe donc un ultrafiltre F de K contenant $\varphi(x)$ et k . L'élément premier minimal $\pi(F)$ ne majore pas k et on a $\pi(F) \leq x$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigwedge \{p \in \pi T; p \leq x\}$.

COROLLAIRE 1. - Pour tout élément premier minimal p d'un treillis arithmétique complet, $p = \gamma(p)$.

COROLLAIRE 2. - Pour tout élément premier x d'un treillis arithmétique complet, $\gamma(x)$ est premier si, et seulement si, x contient un seul élément premier minimal.

6. Treillis projetables et plats.

Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté. Rappelons que pour tout élément a de T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) a admet un complément.
- (b) $a \vee a^\perp = 1$.
- (c) $a = a^{\perp\perp}$ et $a^{\perp\perp} \vee a^\perp = 1$.

Si a vérifie l'une de ces propriétés, on dit que a est central. Les éléments centraux forment un treillis de Boole $\mathcal{D}$, sous-treillis de T et sous-treillis de Boole du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments.

On appelle treillis de Stone tout treillis distributif pseudo-complémenté T tel que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. On peut donner les caractérisations suivantes d'un treillis de Stone :

PROPOSITION 6.1 (Grätzer et Schmidt [16], Frink [14]). - Pour un treillis distributif pseudo-complémenté T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) T est un treillis de Stone.
- (b) $a^\perp \vee b^\perp = (a \wedge b)^\perp$ quels que soient a, b dans T .
- (c) $\mathcal{B}$ est un sous-treillis de T .
- (d) Tout idéal premier de T contient un unique idéal premier minimal.

(e) Pour tout $t \in T$, l'ensemble $\{s; t \wedge s = 0\}$ est un facteur direct de T .

Rappelons qu'un treillis algébrique complet distributif est pseudo-complémenté (cf. 3.5).

DEFINITION 6.2. - Un treillis algébrique complet distributif est appelé projetable si $k^\perp \vee k^{\perp\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T .

PROPOSITION 6.3. - Soit T un treillis algébrique complet distributif projetable. Soit K l'ensemble des éléments compacts de T . On a les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $k_1, k_2 \in K$, il existe $\bar{k}_1 \in T$ tel que

$$\bar{k}_1 \wedge k_2 = 0 \text{ et } k_1 = \bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) .$$
- b) Pour tout $k_1, k_2 \in K$, on a $k_1^\perp \vee k_2^\perp = (k_1 \wedge k_2)^\perp$.
- c) T est arithmétique.
- d) Tout élément premier de T majore un unique élément premier minimal.
- e) Tout élément germinal de T est premier.
- f) Les ensembles de la forme $S_{\pi T}(k)$, $k \in K$, forment une base de l'espace πT des éléments premiers minimaux et ils sont tous compacts.

Démonstration. (a) Soient $k_1, k_2 \in K$. Posons $\bar{k}_1 = k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^\perp$. Alors $\bar{k}_1 \wedge k_2 = 0$ et

$$\bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) = (k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^\perp) \vee (k_1 \wedge k_2) = k_1 .$$

(b) On vérifie facilement que $k_1^\perp \vee k_2^\perp$ est un complément de $k_1^{\perp\perp} \wedge k_2^{\perp\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp\perp}$. Donc $k_1^\perp \vee k_2^\perp = (k_1 \wedge k_2)^\perp$.

(c) Il suffit de montrer que les éléments compacts forment un $\wedge$ -sous-demi-treillis de T . Soient k_1 et k_2 deux éléments compacts et supposons que $(t_\mu)_{\mu \in I}$ soit une famille filtrant su-

périeurement d'éléments de T tels que $k_1 \wedge k_2 \leq \bigvee_{\mu} t_{\mu}$. Choisissons $\bar{k}_1$ comme dans (a). Alors

$$k_1 = \bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) \leq \bigvee_{\mu} (\bar{k}_1 \vee t_{\mu}).$$

Puisque k_1 est compact, on en déduit pour au moins un $\mu \in I$,

$$k_1 \wedge k_2 \leq (\bar{k}_1 \vee t_{\mu}) \wedge k_2 = (\bar{k}_1 \wedge k_2) \vee (t_{\mu} \wedge k_2) \leq t_{\mu}.$$

Donc $k_1 \wedge k_2$ est compact.

d) Supposons que x est un élément premier de T tel qu'il existe deux éléments premiers minimaux distincts p_1 et p_2 majorés par x . Alors on peut trouver un élément compact k vérifiant $k \leq p_1$ et $k \not\leq p_2$. On en déduit $k^{\perp\perp} \leq p_1$ et $k^{\perp} \leq p_2$, d'où $k^{\perp\perp} \vee k^{\perp} \leq x$, ce qui est impossible dans un treillis projetable.

e) Compte tenu de 5.7, la propriété e) est une conséquence de d).

f) Cette propriété sera démontré dans le chapitre II.4.7.

Définissons maintenant une classe de treillis projetables qui a des propriétés particulièrement intéressantes :

DEFINITION 6.4. - Un treillis algébrique complet distributif T est appelé plat si tout élément compact de T est central, c'est à dire si $k \vee k^{\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T .

Si T est un treillis algébrique complet distributif plat, T est projetable et on a $k = k^{\perp\perp}$ pour tout élément compact k de T . Donnons quelques caractérisations de treillis plats :

THEOREME 6.5. - Pour un treillis algébrique complet distributif T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) T est plat.

- (b) $\gamma(x) = x$ pour tout élément premier x de T .
- (c) T est arithmétique et tout élément premier de T est maximal.
- (d) T est arithmétique et tout élément premier de T est minimal.
- (e) T est arithmétique, 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T et les ensembles de la forme $S_{\mu T}(k)$, k compact, forment une base d'ouverts compacts fermés de l'espace μT des éléments maximaux de T .

Démonstration. (a) $\implies$ (b): Soit x un élément premier. Soit k un élément compact majoré par x . Puisque $k \vee k^\perp = 1$, on a $k^\perp \not\leq x$ et par suite $k \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $x = \gamma(x)$.

(b) $\implies$ (a): Soit k un élément compact de T . Pour tout élément premier x tel que $k \leq x$, on a $k \leq \gamma(x)$, donc $k^\perp \not\leq x$ d'après 5.2d. Par conséquent, $k \vee k^\perp$ n'est majoré par aucun élément premier, ce qui entraîne $k \vee k^\perp = 1$.

(a) et (b) $\implies$ (c): Puisqu'un treillis plat est projetable, il est aussi arithmétique d'après 6.3. Soient x et y deux éléments premiers tels que $x \leq y$. On a donc $\gamma(y) \leq x$. Mais d'après (b), $\gamma(y) = y$; donc $x = y$. Cela entraîne (c) puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

Il est clair que (d) et (c) sont équivalentes.

(a) et (c) $\implies$ (e): Puisqu'un treillis plat est projetable, les ensembles $S_{\pi T}(k)$, k compact, forment une base d'ouverts compacts de πT (cf. 6.3). De plus, dans tout treillis algébrique complet distributif, 0 est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux. D'après (c), $\pi T = \mu T$. On a donc démontré (e).

(e) $\implies$ (c): Soit m un élément maximal de T . Si k est un élément compact tel que $k \subseteq m$, alors $Z_{\mu T}(k) = \mu T \setminus S_{\mu T}(k)$ est un voisinage de m ; donc $k \subseteq \gamma(m)$ d'après 5.3. Il s'ensuit que $m = \gamma(m)$. Par conséquent, tout élément maximal de T est premier minimal. Puisque 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T , μT est une partie partout dense de πT . Pour tout élément compact k , $S_{\mu T}(k)$ est une partie partout dense de $S_{\pi T}(k)$. Puisque T est un espace séparé et $S_{\mu T}(k)$ compact, $S_{\mu T}(k)$ est une partie fermée de T . Donc $S_{\mu T}(k) = S_{\pi T}(k)$. Puisque tout élément premier minimal appartient à au moins un ensemble de la forme $S_{\pi T}(k)$, k compact, on en déduit $\mu T = \pi T$.

Chapitre II

L'ESPACE DE STONE-ČECH ISBELL D'UN TREILLIS

DISTRIBUTIF PSEUDO-COMPLEMENTE

J.R. Isbell [18] a associé à tout groupe réticulé commutatif G un espace topologique compact βG et il a démontré que certains homomorphismes de groupes réticulés $f: G \longrightarrow H$ induisent des applications continues $\beta f: \beta H \longrightarrow \beta G$ de manière que β soit un foncteur contravariant. Bigard a remarqué que la construction de βG n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de G et il a suggéré de généraliser les raisonnements d'Isbell aux treillis distributifs pseudo-complémentés.

Nous associerons à tout treillis distributif pseudo-complémenté T un espace topologique compact βT . Avec une définition convenable des morphismes, β sera un foncteur. La construction de βT est une abstraction d'une certaine construction du compactifié de Stone-Čech d'un espace topologique. Le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts d'un espace topologique X est en effet distributif et pseudo-complémenté, et nous verrons que $\beta \mathcal{O}_X$ n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech de X . Plus généralement: Si T est un treillis distributif complet, dont tout élément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors βT n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech de l'espace ξT de tous les éléments premiers de T . Ce résultat s'applique au treillis des idéaux d'un groupe réticulé.

1. c-r-voisinages et c-r-idéaux.

Dans cette section, T désignera toujours un treillis pseudo-complémenté distributif. Nous utiliserons les notations de I.1.3. En particulier, $\vee$ et $\wedge$ désigneront les opérations de treillis dans T ; le pseudo-complément d'un élément t de T sera noté $t^\perp$. On désigne par $\mathcal{B}$ le treillis de Boole des pseudo-compléments dans T .

DEFINITION 1.1. - Soient a et b deux éléments de T . Nous dirons que b est un r-voisinage de a , et nous écrirons $a \prec b$, si $a^\perp \vee b = 1$.

EXEMPLE 1.2. - Soit $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts d'un espace topologique X . Soient $U, V \in \mathcal{O}_X$. Alors V est un r-voisinage de U si, et seulement si, $\bar{U} \subseteq V$.

Démontrons quelques propriétés de la relation $\prec$:

Puisque $0^\perp \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ et $1^\perp \vee 1 = 1$, on a :

$$(P1) \quad 0 \prec 0 \text{ et } 1 \prec 1.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$, alors $a = a \wedge (a^\perp \vee b) = (a \wedge a^\perp) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$; donc :

$$(P2) \quad a \prec b \text{ entraîne } a \leq b.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$, alors $(b^\perp)^\perp \vee a^\perp = 1$; donc :

$$(P3) \quad a \prec b \text{ entraîne } b^\perp \prec a^\perp.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$, alors $(a^{\perp\perp})^\perp \vee b = 1$; donc :

$$(P4) \quad a \prec b \text{ entraîne } a^{\perp\perp} \prec b.$$

Si $a_1 \leq a \prec b \leq b_1$, alors $a_1^\perp \geq a^\perp$ et $a^\perp \vee b = 1$, donc $a_1^\perp \vee b_1 = 1$:

$$(P5) \quad a_1 \leq a \prec b \leq b_1 \text{ entraîne } a_1 \prec b_1.$$

Si $a^+ \vee b = 1$ et $a_1^+ \vee b_1 = 1$, alors $a^+ \vee b \vee b_1 = 1 = a_1^+ \vee b \vee b_1$, ce qui entraîne $(a^+ \wedge a_1^+) \vee (b \vee b_1) = 1$ puisque T est distributif. Puisque $a^+ \wedge a_1^+ = (a \vee a_1)^+$, nous avons donc :

$$(P6) \quad a \prec b \text{ et } a_1 \prec b_1 \text{ entraîne } a \vee a_1 \prec b \vee b_1.$$

Si $a^+ \vee b = 1$ et $a^+ \vee b_1 = 1$, alors $a^+ \vee (b \wedge b_1) = 1$. Donc $a \prec b$ et $a \prec b_1$ entraînent $a \prec b \wedge b_1$. On en déduit :

$$(P7) \quad a \prec b \text{ et } a_1 \prec b_1 \text{ entraîne } a \wedge a_1 \prec b \wedge b_1.$$

DÉFINITION 1.3. - Soit Q l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1. Soient a et b deux éléments de T . On appelle chaîne normale entre a et b toute famille $(c_r)_{r \in Q}$ d'éléments de T telle que $c_0 = a$ et $c_1 = b$ et telle que $c_r \prec c_s$ chaque fois que $r < s$. On dit que b est un c-r-voisinage de a , et on écrit $a \ll b$, s'il existe au moins une chaîne normale entre a et b . Dans cette définition on peut évidemment remplacer Q par n'importe quel ensemble ordonné o-isomorphe à Q .

EXEMPLE 1.4. - Une famille $(U_r)_{r \in Q}$ d'ouverts d'un espace topologique X est une chaîne normale dans $\mathcal{O}_X$ si, et seulement si, $\overline{U_r} \subseteq U_s$ chaque fois que $r < s$.

Démontrons quelques propriétés de la relation $\ll$:

La famille $(a_r)_{r \in Q}$ avec $a_r = 0$ (resp. $a_r = 1$) pour tout $r \in Q$ est une chaîne normale d'après (P1). Par conséquent :

$$(P'1) \quad 0 \ll 0 \text{ et } 1 \ll 1.$$

Si b est un c-r-voisinage de a , alors b est un r-voisinage de a . Donc (P2) entraîne :

$$(P'2) \quad a \ll b \text{ entraîne } a \leq b.$$

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a et b , la famille

$(c_{1-r}^+)_r \in Q$ est une chaîne normale entre b^+ et a^+ d'après (P3); donc :

$$(P'3) \quad a \ll b \text{ entraîne } b^+ \ll a^+.$$

De même, la propriété (P4) permet de montrer :

$$(P'4) \quad a \ll b \text{ entraîne } a^{++} \ll b.$$

Si $a_1 \leq a$ et $b \leq b_1$ et si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a et b , la famille $(d_r)_{r \in Q}$ définie par $d_0 = a_1$, $d_1 = b_1$, $d_r = c_r$ pour tout $r \neq 0, 1$, est une chaîne normale entre a_1 et b d'après (P5). Nous avons donc :

$$(P'5) \quad a_1 \leq a \ll b \leq b_1 \text{ entraîne } a_1 \ll b_1.$$

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a et b et si $(d_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a_1 et b_1 , alors $(c_r \vee d_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre $a \vee a_1$ et $b \vee b_1$ et $(c_r \wedge d_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre $a \wedge a_1$ et $b \wedge b_1$ d'après (P6) et (P7). Donc :

$$(P'6) \quad a \ll b \text{ et } a_1 \ll b_1 \text{ entraîne } a \vee a_1 \ll b \vee b_1.$$

$$(P'7) \quad a \ll b \text{ et } a_1 \ll b_1 \text{ entraîne } a \wedge a_1 \ll b \wedge b_1.$$

La propriété suivante sera très importante : Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a et b , la famille $(c_r)_{r \in Q, r \leq 1/2}$ est une chaîne normale entre a et $c_{1/2}$ et $(c_r)_{r \in Q, r \geq 1/2}$ est une chaîne normale entre $c_{1/2}$ et b . Donc :

$$(P'8) \quad \text{Si } a \ll b, \text{ il existe } c \text{ tel que } a \ll c \ll b.$$

DEFINITION 1.5. - Un idéal φ du treillis T est appelé c-r-idéal si tout élément a de φ admet un c-r-voisinage b appartenant aussi à φ .

Soit $\mathcal{I}(T)$ le treillis de tous les idéaux de T . D'après [4], p. 114, $\mathcal{I}(T)$ est un treillis distributif. Soit $\mathcal{C}(T)$ l'ensemble des c-r-idéaux de T .

LEMME 1.6. - Si $\mathcal{C}$ est la borne supérieure dans $\mathcal{T}(T)$ d'une famille $(\mathcal{C}_\mu)_{\mu \in M}$ de c-r-idéaux, $\mathcal{C}$ est aussi un c-r-idéal.

Démonstration. Soit a un élément de $\mathcal{C}$. Il y a un nombre fini d'indices $\mu_1, \dots, \mu_n \in M$ et des éléments $a_i \in \mathcal{C}_{\mu_i}$ ($i = 1, \dots, n$) tels que $a = a_1 \vee \dots \vee a_n$. Tout a_i admet un c-r-voisinage b_i dans $\mathcal{C}_{\mu_i}$. D'après (P'6), $b = b_1 \vee \dots \vee b_n$ est un c-r-voisinage de a . De plus, b appartient à $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est un c-r-idéal.

D'après le lemme 1.6, $\mathcal{C}(T)$ est un $\vee$ -sous-demi-treillis complet de $\mathcal{T}(T)$. Puisque $\{0\}$ est un c-r-idéal, $\mathcal{C}(T)$ est donc un treillis complet. Tout idéal η de T contient un plus grand c-r-idéal que nous désignerons par $k(\eta)$. Si η est l'idéal principal engendré par un élément a de T , c'est à dire si

$$\eta = \{t \in T ; t \leq a\},$$

on notera simplement $k(a)$ au lieu de $k(\eta)$. On peut donner une caractérisation simple de $k(\eta)$:

LEMME 1.7. - Pour tout idéal η de T , $k(\eta)$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage $b \in \eta$.

Démonstration. Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage $b \in \eta$. Evidemment, $k(\eta) \subseteq \mathcal{Z}$. D'autre part, $\mathcal{Z}$ est un c-r-idéal. En effet, si $a \ll b \in \eta$ et $a_1 \leq a$, alors $a_1 \ll b$ d'après (P'5); donc $\mathcal{Z}$ est héréditaire. Si $a \ll b \in \eta$ et $a_1 \ll b_1 \in \eta$, alors $a \vee a_1 \ll b \vee b_1 \in \eta$ d'après (P'6); donc $\mathcal{Z}$ est un idéal de T . L'idéal $\mathcal{Z}$ est un c-r-idéal; car si $a \in \mathcal{Z}$, il existe $b \in \eta$ tel que $a \ll b$; il existe donc un c tel que $a \ll c \ll b$, et on a $c \in \mathcal{Z}$. Puisque $\mathcal{Z}$ est un c-r-idéal contenu dans η , on a aussi $\mathcal{Z} \subseteq k(\eta)$.

COROLLAIRE. - Si b est un élément quelconque de T , le c-r-idéal $k(b)$ est l'ensemble des éléments a de T dont b est un c-r-voisinage.

L'intersection d'une famille quelconque de c-r-idéaux de T n'est pas nécessairement un c-r-idéal. Mais si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux c-r-idéaux, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est aussi un c-r-idéal. En effet, tout élément a de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ admet un c-r-voisinage $b_1 \in \mathcal{C}_1$ et un c-r-voisinage $b_2 \in \mathcal{C}_2$; l'élément $b = b_1 \wedge b_2$ appartient à $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ et est un c-r-voisinage de a d'après (P'7). Par conséquent, $\mathcal{C}(T)$ est un sous-treillis de $\mathcal{I}(T)$; en particulier, $\mathcal{C}(T)$ est distributif. Puisque $a \ll 1$ pour tout $a \in T$, on a $T \in \mathcal{C}(T)$. De plus, T est un élément compact de $\mathcal{C}(T)$, puisque tout idéal principal est compact. Ainsi nous avons démontré :

PROPOSITION 1.8. - L'ensemble $\mathcal{C}(T)$ des c-r-idéaux de T est un treillis distributif complet dont le plus grand élément est compact.

D'après I,3.3, tout c-r-idéal propre de T est contenu dans un c-r-idéal maximal de T . Dans la section 2 nous aurons besoin de la caractérisation suivante des c-r-idéaux maximaux :

LEMME 1.9. - Pour un c-r-idéal $\mathcal{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $\mathcal{C}$ est un c-r-idéal maximal.
- (b) Il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de T tel que $\mathcal{C} = k(\mathfrak{p})$.
- (c) $a \ll b$ entraîne $a \in \mathcal{C}$ ou $b \in \mathcal{C}$ quels que soient $a, b \in T$.

Démonstration. (a) entraîne (b), puisque tout c-r-idéal maximal $\mathcal{C}$ est contenu dans au moins un idéal maximal $\mathfrak{p}$ de T , ce qui

entraîne $\mathcal{C} = k(\mathfrak{p})$.

(b) $\implies$ (c) : Soit $\mathcal{C} = k(\mathfrak{p})$ pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de T et supposons que $a \not\leq b$. Il existe c tel que $a \not\leq c \not\leq b$. Puisque $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on a $c \in \mathfrak{p}$ ou $c^\perp \in \mathfrak{p}$. Si $c \in \mathfrak{p}$, on a $a \in k(\mathfrak{p})$. Si $c^\perp \in \mathfrak{p}$, on a $b^\perp \in k(\mathfrak{p})$ puisque $b^\perp \not\leq c^\perp$ d'après (P'3).

(c) $\implies$ (a) : Supposons que $\mathcal{C}$ vérifie la condition (c) et que $\mathcal{C}_1$ soit un c-r-idéal contenant $\mathcal{C}$ strictement. Il y a alors un élément a n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, qui admet un c-r-voisinage $b \in \mathcal{C}_1$. D'après (c), $b^\perp$ appartient à $\mathcal{C}$ et par suite à $\mathcal{C}_1$. Donc $c = b \vee b^\perp \in \mathcal{C}_1$. Or, $c \in \mathcal{C}_1$ entraîne $c^{\perp\perp} \in \mathcal{C}_1$ d'après (P'4). Puisque $c^{\perp\perp} = 1$, on a donc $\mathcal{C}_1 = T$.

Tout c-r-idéal premier vérifie la propriété (c) du lemme précédent. Par conséquent, tout c-r-idéal premier est maximal.

Si T est un treillis distributif avec 0 , l'intersection des idéaux premiers de T est réduite à $\{0\}$ d'après I.3.5. Le lemme précédent admet donc la conséquence suivante :

COROLLAIRE. - L'intersection des c-r-idéaux maximaux de T est réduite à $\{0\}$.

2. L'espace de Stone-Čech-Isbell.

Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté. Nous utiliserons les mêmes notations que dans la section précédente.

D'après la proposition 1.7, le treillis des c - r -idéaux de T est distributif. Les éléments maximaux de ce treillis sont donc premiers. On peut donc considérer l'espace des c - r -idéaux maximaux de T , c'est à dire l'ensemble des c - r -idéaux maximaux muni de la topologie de Zariski comme dans la section I.2.

DEFINITION 2.1. - L'espace des c - r -idéaux maximaux d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est appelé espace de Stone-Čech-Isbell de T ; on le note BT .

Donnons une autre définition de la topologie sur BT : Pour tout élément a de T , désignons par $S_B(k(a))$ l'ensemble des c - r -idéaux maximaux ne contenant pas le c - r -idéal $k(a)$ et par $Z_B(a)$ l'ensemble des c - r -idéaux maximaux $\mathcal{P}$ tels que $a \in \mathcal{P}$. On a $Z_B(a) = Z_B(a^{++})$ pour tout a dans T ; car $a \in \mathcal{P}$ entraîne $a^{++} \in \mathcal{P}$ pour tout c - r -idéal $\mathcal{P}$.

LEMME 2.2. - Pour tout $a \in B$, $S_B(k(a)) = Z_B(a^+)$. Les ensembles $Z_B(a)$, $a \in T$, forment une base de la topologie de BT

Démonstration. Soit $\mathcal{P} \in BT$. Si $a^+ \in \mathcal{P}$, il y a un $c \in \mathcal{P}$ tel que $a^+ \ll c$. Puisque $c^+ \ll a^{++}$, on a $c^+ \in k(a^{++})$. On en tire que $k(a^{++}) \not\subseteq \mathcal{P}$, puisque $c^+ \notin \mathcal{P}$. Inversement, si $k(a^{++}) \subseteq \mathcal{P}$, il existe $c \notin \mathcal{P}$ tel que $c \ll a^{++}$; donc $a^+ \in \mathcal{P}$ d'après 1.9. Ainsi nous avons démontré que $S_B(k(a^{++})) = Z_B(a^+)$. Si $\mathcal{J}$ est un c - r -idéal

quelconque de T , alors $\mathcal{J} = \bigcup \{k(a) ; a \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}\}$. Donc $S_B(\mathcal{J}) = \bigcup_{a \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}} S_B(k(a))$. Donc tout ouvert de BT est une réunion d'une famille d'ouverts de la forme $S_B(k(a))$, $a \in \mathcal{B}$. Puisque

$$S_B(k(a)) \cap S_B(k(b)) = S_B(k(a) \cap k(b)) = S_B(k(a \wedge b)) ,$$

les ensembles de la forme $S_B(k(a))$, $a \in \mathcal{B}$, forment une base de la topologie de Zariski sur BT .

Démontrons maintenant le théorème principal de ce chapitre :

THEOREME 2.3. - L'espace de Stone-Cech-Isbell BT d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est compact.

Démonstration. D'après les propositions II.1.8 et I.3.3, BT est quasi-compact. Montrons que BT est séparé. Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux c-r-idéaux maximaux distincts. Soit a un élément de $\mathcal{U}_2$ n'appartenant pas à $\mathcal{U}_1$. Il existe des éléments b, c, d dans $\mathcal{U}_2$ tels que $a \ll b \ll c \ll d$. Puisque $b \wedge c^\perp = 0$, on a $k(b) \cap k(c^\perp) = \{0\}$; de plus, $k(b) \not\subseteq \mathcal{U}_1$ puisque $a \in k(b)$ et $a \notin \mathcal{U}_1$; en outre $k(c^\perp) \not\subseteq \mathcal{U}_2$ puisque $d^\perp \in k(c^\perp)$ et $d^\perp \notin \mathcal{U}_2$. Le treillis des c-r-idéaux de T vérifie donc les hypothèses de I.2.3f.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.4. - Soient H et K deux parties compactes disjointes de BT . Il existe c dans T et un c-r-voisinage b de c tel que $H \subseteq Z_B(b)$ et $K \subseteq Z_B(c^\perp)$.

Démonstration. Tout $\mathcal{U} \in H$ admet un voisinage ne rencontrant pas K , de la forme $Z_B(a_\mathcal{U})$, $a_\mathcal{U} \in T$ (cf. lemme 2.2). Pour tout $\mathcal{U} \in H$, soient $c_\mathcal{U}$ et $b_\mathcal{U}$ des éléments de $\mathcal{U}$ tels que $a_\mathcal{U} \ll c_\mathcal{U} \ll b_\mathcal{U}$; évidemment $Z_B(b_\mathcal{U})$ est aussi un voisinage de $\mathcal{U}$ ne rencontrant pas K . Puisque

H est compact, il y a un nombre fini $e_1, \dots, e_n$ d'éléments de H tels que

$$H \subseteq Z_B(b_{e_1}) \cup \dots \cup Z_B(b_{e_n}) .$$

Soient $b = b_{e_1} \wedge \dots \wedge b_{e_n}$ et $c = c_{e_1} \wedge \dots \wedge c_{e_n}$. Alors $c \ll b$ d'après (P'7) et $H \subseteq Z_B(b)$. Puisque $a_{e_i} \ll c_{e_i}$ et $a_{e_i} \notin \mathcal{C}$ pour tout $\mathcal{C} \in K$, $c_{e_i}^+$ appartient à $\mathcal{C}$ pour tout $\mathcal{C} \in K$ quel que soit $i = 1, \dots, n$. On en déduit $K \subseteq Z_B(c^+)$.

Un élément a de T vérifie $a \ll a$ si, et seulement si, $a \vee a^+ = 1$, c'est à dire si, et seulement si, a est central. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments centraux de T est un sous-treillis de Boole de $\mathcal{B}$ (cf. sec. I.6).

Si $a \ll a$, tout c - r -idéal maximal contient a ou a^+ d'après 1.9 ; puisqu'aucun c - r -idéal propre ne contient à la fois a et a^+ , l'espace de Stone-Cech-Isbell BT est la réunion des deux ouverts disjoints $Z_B(a)$ et $Z_B(a^+)$; il s'ensuit que $Z_B(a)$ et $Z_B(a^+)$ sont aussi fermés. Réciproquement, nous démontrerons que toute partie à la fois ouverte et fermée de BT est de cette forme ; plus précisément :

PROPOSITION 2.5. - $a \mapsto Z_B(a^+)$ est un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{D}$ des éléments a de T vérifiant $a \ll a$ sur le treillis de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de BT .

Démonstration. Il suffit de montrer que $a \mapsto Z_B(a^+)$ est (i) strictement croissant et (ii) surjectif.

(i) Soient a et b deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $a < b$. On a alors $a^+ > b^+$ et il est clair que $Z_B(a^+) \subseteq Z_B(b^+)$. Il existe un idéal premier η de T contenant b^+ et ne contenant pas a^+ .

D'après le lemme 1.9, $\mathcal{U} = k(\eta)$ est un c-r-idéal maximal. Il contient $b^\perp$ puisque $b^\perp \in \mathcal{D}$, mais il ne contient pas $a^\perp$. Par conséquent, $Z_\beta(a^\perp) \neq Z_\beta(b^\perp)$.

(ii) Prenons une partie ouverte et fermée H de BT . D'après le lemme 2.4, il existe $c \in T$ et un c-r-voisinage b de c tels que $H \subseteq Z_\beta(b)$ et $BT \setminus H \subseteq Z_\beta(c^\perp)$. Il s'ensuit que $b \wedge c^\perp$ est contenu dans tout c-r-idéal maximal. Donc $b \wedge c^\perp = 0$, c'est à dire que $b \leq c^{\perp\perp}$. Puisque $c \ll b$, on a aussi $c^{\perp\perp} \leq b$ d'après (P'4) et (P'2). Par conséquent, $b = c^{\perp\perp}$. Puisque b est un c-r-voisinage de c , $b \vee c^\perp = b \vee b^\perp = 1$. Si l'on pose $a = b^\perp$, on a donc $H = Z_\beta(a^\perp)$ et $a \in \mathcal{D}$.

D'après (M2), $f(a^\perp) \subseteq f(a)^\perp$; donc $f(a)^\perp \vee f(b) = 1$. Ainsi nous avons :

(M5) $a \prec b$ entraîne $f(a) \prec f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T , $(f(c_r))_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T' d'après (M6). Donc :

(M6) $a \ll b$ entraîne $f(a) \ll f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Remarquons qu'un morphisme au sens défini ci-dessus n'est pas en général un homomorphisme de treillis.

Nous allons montrer que tout morphisme $f: T \longrightarrow T'$ induit une application continue $Bf: BT' \longrightarrow BT$.

Soit φ un c-r-idéal maximal de T' . En vertu de (M3), l'image réciproque $f^{-1}(\varphi)$ est un idéal de T . Soit $Bf(\varphi)$ le plus grand c-r-idéal de T contenu dans $f^{-1}(\varphi)$. D'après 1.7, $Bf(\varphi)$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage b tel que $f(b) \in \varphi$.

LEMME 3.3. - $Bf(\varphi)$ est un c-r-idéal maximal de T .

Démonstration. Soient a et b deux éléments de T tels que $a \ll b$. Choisissons c et d tels que $a \ll c \ll d \ll b$. D'après (M6), $f(c) \ll f(d)$. Puisque φ est un c-r-idéal maximal, $f(c) \in \varphi$ ou $f(d)^\perp \in \varphi$ d'après 1.9. Si $f(c) \in \varphi$, alors $a \in Bf(\varphi)$. Si $f(d)^\perp \in \varphi$, alors $b^\perp \in Bf(\varphi)$; car $f(d^\perp) \subseteq f(d)^\perp$ d'après (M2) et $b^\perp \ll d^\perp$. D'après 1.9, $Bf(\varphi)$ est donc un c-r-idéal maximal.

Ainsi nous avons une application bien définie $Bf: BT' \longrightarrow BT$. Montrons qu'elle est continue: Soit $\varphi \in BT'$ et soit $U \subseteq BT$ un voisinage de $Bf(\varphi)$. D'après 2.2, on peut supposer que $U = Z_B(a)$ pour un certain élément a de T . En particulier, a appartient à $Bf(\varphi)$. Soit b un c-r-voisinage de a appartenant aussi à $Bf(\varphi)$.

D'après (M2), $f(a^\perp) \subseteq f(a)^\perp$; donc $f(a)^\perp \vee f(b) = 1$. Ainsi nous avons :

(M5) $a \prec b$ entraîne $f(a) \prec f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T , $(f(c_r))_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T' d'après (M6). Donc :

(M6) $a \ll b$ entraîne $f(a) \ll f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Remarquons qu'un morphisme au sens défini ci-dessus n'est pas en général un homomorphisme de treillis.

Nous allons montrer que tout morphisme $f: T \longrightarrow T'$ induit une application continue $Bf: BT' \longrightarrow BT$.

Soit φ un c-r-idéal maximal de T' . En vertu de (M3), l'image réciproque $f^{-1}(\varphi)$ est un idéal de T . Soit $Bf(\varphi)$ le plus grand c-r-idéal de T contenu dans $f^{-1}(\varphi)$. D'après 1.7, $Bf(\varphi)$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage b tel que $f(b) \in \varphi$.

LEMME 3.3. - $Bf(\varphi)$ est un c-r-idéal maximal de T .

Démonstration. Soient a et b deux éléments de T tels que $a \ll b$. Choisissons c et d tels que $a \ll c \ll d \ll b$. D'après (M6), $f(c) \ll f(d)$. Puisque φ est un c-r-idéal maximal, $f(c) \in \varphi$ ou $f(d)^\perp \in \varphi$ d'après 1.9. Si $f(c) \in \varphi$, alors $a \in Bf(\varphi)$. Si $f(d)^\perp \in \varphi$, alors $b^\perp \in Bf(\varphi)$; car $f(d^\perp) \subseteq f(d)^\perp$ d'après (M2) et $b^\perp \ll d^\perp$. D'après 1.9, $Bf(\varphi)$ est donc un c-r-idéal maximal.

Ainsi nous avons une application bien définie $Bf: BT' \longrightarrow BT$. Montrons qu'elle est continue : Soit $\varphi \in BT'$ et soit $U \subseteq BT$ un voisinage de $Bf(\varphi)$. D'après 2.2, on peut supposer que $U = Z_B(a)$ pour un certain élément a de T . En particulier, a appartient à $Bf(\varphi)$. Soit b un c-r-voisinage de a appartenant aussi à $Bf(\varphi)$.

L'élément a appartient à $Bf(\eta)$ pour tout $\eta \in BT'$ tel que $f(b) \in \eta$. Donc l'image réciproque $(Bf)^{-1}(U)$ contient l'ensemble $Z_B(f(b))$ qui est un voisinage de φ dans BT' .

Montrons que B est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts: Soient $f: T \longrightarrow T'$ et $g: T' \longrightarrow T''$ deux morphismes de treillis distributifs pseudo-complémentés. Soit φ un c-r-idéal maximal de T'' . Alors $Bg(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal de T' contenu dans $\varphi^{-1}(\varphi)$. Donc $f^{-1}(Bg(\varphi)) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(\varphi))$. Or, $(Bf \circ Bg)(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal contenu dans $f^{-1}(Bg(\varphi))$ et $B(g \circ f)(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal contenu dans $g^{-1}(f^{-1}(\varphi))$. Donc $(Bf \circ Bg)(\varphi) \subseteq B(g \circ f)(\varphi)$. Puisqu'il s'agit de c-r-idéaux maximaux dans les deux cas, on a nécessairement égalité. Par conséquent, $Bf \circ Bg = B(g \circ f)$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

THEOREME 3.4. - B est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts.

Le foncteur B sera appelé foncteur de Stone-Čech-Isbell.

Dans ce qui suit, soit $f: T \longrightarrow T'$ un morphisme de treillis distributifs pseudo-complémentés.

PROPOSITION 3.5. - L'application $Bf: BT' \longrightarrow BT$ est surjective si, et seulement si, $f(a) \neq 1$ pour tout élément a de T qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(a) \neq 1$ pour tout élément

a qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Soit $\mathcal{P}$ un c-r-idéal maximal de T . L'image $f(\mathcal{P})$ est filtrante supérieurement et ne contient pas 1 en vertu de l'hypothèse. De plus, tout élément de $f(\mathcal{P})$ admet un c-r-voisinage appartenant aussi à $f(\mathcal{P})$ d'après (M6). Par conséquent, $f(\mathcal{P})$ est contenu dans un c-r-idéal maximal $\mathcal{J}$ de T' . Puisque $\mathcal{P} \subseteq f^{-1}(\mathcal{J})$, on a $\mathcal{P} = Rf(\mathcal{J})$. Donc Rf est surjective.

Supposons inversement que Rf soit surjective. Soit a un élément de T qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de T contenant b . Alors $a \in k(\mathcal{M})$ et $k(\mathcal{M})$ est un c-r-idéal maximal d'après 1.9. Soit $\mathcal{P}$ un c-r-idéal maximal de T' tel que $k(\mathcal{M}) = Rf(\mathcal{P})$. Alors $a \in Rf(\mathcal{P}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{P})$ et par suite $f(a) \in \mathcal{P}$. Donc $f(a) \neq 1$.

COROLLAIRE 1. - Si $f(a) \neq 1$ pour tout pseudo-complément a de T différent de 1, alors Rf est surjectif.

COROLLAIRE 2. - Si f est injectif, Rf est surjectif.

PROPOSITION 3.6. - Pour que $Rf: RT' \longrightarrow RT$ soit injective, il suffit que pour tout couple a', b' d'éléments de T' tels que $a \ll b$, il existe $a, b \in T$ tels que $a \ll b$ et $f(a) = a'$, $f(b) = b'$.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux c-r-idéaux maximaux de T' distincts. Soit a' un élément de $\mathcal{P}_1$ non contenu dans $\mathcal{P}_2$; soit b' un c-r-voisinage de a' dans $\mathcal{P}_1$. D'après l'hypothèse, il existe a et b dans T tels que $a \ll b$ et $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. L'élément a appartient à $Rf(\mathcal{P}_1)$, mais pas à $Rf(\mathcal{P}_2)$. Donc $Rf(\mathcal{P}_1) \neq Rf(\mathcal{P}_2)$.

COROLLAIRE. - Rf est injective si f est surjective et si la condition (I) suivante est vérifiée:

(I) Pour tout $a, b \in T$, $f(a) \perp \vee f(b) = 1$ entraîne $a \perp \vee b = 1$.

En effet, soient a' et b' deux éléments de T' tels que $a' \prec b'$. Puisque f est surjective, il existe $a, b \in T$ tels que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. Donc $1 = (a')^\perp \vee b' = f(a)^\perp \vee f(b)$ ce qui entraîne $a^\perp \vee b = 1$ d'après la condition (I); donc $a \prec b$. On en déduit que si $(c'_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T' , il existe une chaîne normale $(c_r)_{r \in Q}$ dans T telle que $f(c_r) = c'_r$ pour tout $r \in Q$. Cela entraîne que la condition suffisante de la proposition 3.6 est vérifiée.

EXEMPLE 3.7. - Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté et soit u un élément de T . Soit $T' = \{t \in T; t \leq u\}$. Alors T' est aussi un treillis distributif pseudo-complémenté. L'application $g: T \longrightarrow T'$ définie par $g(t) = t \wedge u$ quel que soit $t \in T$, est un morphisme surjectif. L'application $Bg: BT' \longrightarrow BT$ est surjective si, et seulement si, u n'admet aucun c-r-voisinage différent de 1 , comme le montre la proposition 3.5. En particulier, si $u^{\perp\perp} = 1$, Bg est surjective. Si la propriété suivante (I') est vérifiée:

(I') Pour tout $a, b \in T$, $a^\perp \vee b \geq u$ entraîne $a^\perp \vee b = 1$, alors Bg est injective d'après le corollaire de 3.6. De plus, $u^{\perp\perp} \vee 0 \geq u$ entraîne $u^{\perp\perp} = u^{\perp\perp} \vee 0 = 1$ lorsque (I') est vérifiée. Donc, si (I') est vérifiée, $Bg: BT' \longrightarrow BT$ est un homéomorphisme.

EXEMPLE 3.8. - Soit z un élément d'un treillis de Brouwer complet T . Soit $T' = \{t \in T; z \leq t\}$. T' est aussi un treillis de Brouwer. L'application $h: T \longrightarrow T'$ définie par $h(t) = t \vee z$ est un morphisme surjectif. D'après 3.5, $Bh: BT' \longrightarrow BT$ est surjectif si, et seulement si, z n'est c-r-voisinage d'aucun élément a différent de 0 .

4. Propriétés de l'espace de Stone-Čech-Isbell.

Soit $\mathcal{B}$ un treillis de Boole. Tout treillis de Boole est distributif et pseudocomplémenté. Tout idéal de $\mathcal{B}$ est un c-r-idéal. Par conséquent l'espace $\mathcal{B}$ des c-r-idéaux maximaux coïncide avec l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}$.

Considérons maintenant un treillis distributif pseudo-complémenté T . Désignons par $\mathcal{ST}$ l'espace de Stone des idéaux maximaux du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments dans T .

PROPOSITION 4.1. - L'application $t \mapsto q(t) = t^{++}$ est un morphisme de T sur $\mathcal{B}$. Elle induit une application continue $Bq : \mathcal{ST} \longrightarrow \mathcal{BT}$. Cette application est surjective; elle est un homéomorphisme si, et seulement si, T est un treillis de Stone.

Démonstration. Il est clair que l'application $q : T \longrightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme (cf. le théorème de Glivenko I.1.3). La restriction de q sur $\mathcal{B}$ est bijective. D'après le corollaire 1 de 3.5, l'application Bq est donc surjective.

Soit φ un c-r-idéal de T . D'après (P'4), $\varphi \cap \mathcal{B}$ est un idéal du treillis de Boole $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\varphi \cap \mathcal{B}$ est contenu dans au moins un idéal maximal de $\mathcal{B}$. Si η est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ contenant $\varphi' = \varphi \cap \mathcal{B}$, où φ est un c-r-idéal maximal de T , alors $Bq(\eta) = \varphi$. Par conséquent, Bq est injective si, et seulement si, pour tout c-r-idéal maximal φ de T , $\varphi \cap \mathcal{B}$ est contenu dans exactement un idéal maximal de $\mathcal{B}$. Tout idéal propre d'un treillis de Boole étant l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux, cette dernière condition signifie que $\varphi \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ pour tout c-r-idéal maximal φ de T .

Si T est un treillis de Stone, $a \leq a^\perp$ pour tout $a \in B$; par conséquent, $a \in \mathcal{U}$ ou $a^\perp \in \mathcal{U}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathcal{U}$ de T , ce qui entraîne que $\mathcal{U} \cap B$ est un idéal maximal de B quel que soit $\mathcal{U} \in BT$. Donc Bq est injective.

Inversement, si $\mathcal{U} \cap B$ est un idéal maximal de B pour tout c-r-idéal maximal $\mathcal{U}$ de T , alors quel que soit $a \in B$, $a \in \mathcal{U}$ ou $a^\perp \in \mathcal{U}$ pour tout $\mathcal{U} \in BT$; donc BT est la réunion des deux ouverts disjoints $Z_B(a)$ et $Z_B(a^\perp)$ quel que soit $a \in B$. D'après 2.5, cela entraîne que $\mathcal{D} = B$, c'est à dire que T est un treillis de Stone.

Soit T un treillis distributif et pseudo-complémenté. Si x est un élément premier de T , l'idéal principal $\{t \in T; t \leq x\}$ est un idéal premier. Par conséquent, le plus grand c-r-idéal $k(x)$ majoré par x est un c-r-idéal maximal d'après 1.9.

PROPOSITION 4.2. - Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis distributif pseudo-complémenté T . L'application $x \mapsto k(x)$ de X dans BT est continue. Si $\bigwedge_{x \in X} x = 0$, l'image $k(X)$ est une partie partout dense de BT .

Démonstration. Soit $x \in X$ et soit U un voisinage de $k(x)$ dans BT . On peut supposer que $U = Z_B(a)$ pour un certain élément a de T . Soit b un c-r-voisinage de a , contenu dans $k(x)$. L'ensemble $S_X(b^\perp)$ des éléments $y \in X$ tels que $b^\perp \not\leq y$, est un ouvert de X . Puisque b appartient à $k(x)$, on a $b^\perp \not\leq x$, c'est à dire que $S_X(b^\perp)$ est un voisinage de x . De plus, $S_X(b^\perp)$ est contenu dans $k^{-1}(U)$; car $b \leq y$ pour tout $y \in S_X(b^\perp)$ et par suite $a \in k(y)$ pour tout $y \in S_X(b^\perp)$. - La deuxième assertion est évidente.

Maintenant nous sommes prêts à démontrer la liaison entre le

compactifié de Stone-Cech d'un espace topologique X et l'espace de Stone-Cech-Isbell d'un treillis distributif pseudo-complémenté T .

Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts de X . Pour tout $x \in X$, soit $u(x)$ le plus grand ouvert de X ne contenant pas x . Alors $u(x)$ est un élément premier du treillis $\mathcal{O}_X$. Soit $u(X)$ l'espace des éléments premiers de $\mathcal{O}_X$ de la forme $u(x)$, $x \in X$. La topologie sur $u(X)$ étant la topologie de Zariski, tout ouvert V de $u(X)$ est de la forme suivante: Il y a un ouvert U de X tel que V est l'ensemble des $u(x)$ tels que $U \not\subseteq u(x)$, c'est à dire que $V = u(U)$. Par conséquent, $x \mapsto u(x)$ est une application continue de X sur $u(X)$.

D'après 4.2, nous avons une application continue k de $u(X)$ dans l'espace de Stone-Cech-Isbell $B\mathcal{O}_X$. L'image $ku(X)$ est partout dense dans $B\mathcal{O}_X$ puisque $\bigcap_{x \in X} u(x) = \emptyset$. Posons $\kappa = k \circ u$.

THEOREME 4.3. - Soit $\varphi: X \longrightarrow K$ une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique compact K . Alors il existe une unique application continue $\bar{\varphi}: B\mathcal{O}_X \longrightarrow K$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \kappa$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\kappa} & B\mathcal{O}_X \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & K \end{array}$$

En d'autres termes, $B\mathcal{O}_X$ est un compactifié de Stone-Cech de X .

Démonstration. L'unicité de $\bar{\varphi}$ est une conséquence immédiate du fait que $\kappa(X)$ est partout dense dans $B\mathcal{O}_X$. Il suffit donc de démontrer l'existence de $\bar{\varphi}$.

Soit $\mathcal{I}$ un c-r-idéal maximal de $\mathcal{O}_X$. Soit $\Phi(\mathcal{I})$ l'ensemble des ouverts U de K tels que $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{I}$. Alors $\Phi(\mathcal{I})$ est un idéal

d'ouverts de K . Puisque $K \in \bar{\Phi}(\varphi)$ et puisque K est compact, $\bar{\Phi}(\varphi)$ n'est pas un recouvrement de K . Il existe donc $x \in K$ tel que x n'appartienne à aucun des ouverts $U \in \bar{\Phi}(\varphi)$. Soit y un élément de K différent de x . Puisque K est un espace normal, il y a un voisinage ouvert U de x , qui admet un c-r-voisinage V tel que $y \in \bar{V}$. Il s'ensuit que $\theta_\varphi(V) = \varphi^{-1}(V)$ est un c-r-voisinage de $\theta_\varphi(U) = \varphi^{-1}(U)$ tel que $\varphi^{-1}(U) \notin \varphi$. Puisque φ est un c-r-idéal maximal, on a $\varphi^{-1}(V)^\perp \in \varphi$ d'après 1.9; donc $\varphi^{-1}(V^\perp) \in \varphi$. Par conséquent, x appartient à un ouvert $V^\perp \in \bar{\Phi}(\varphi)$. Ainsi nous avons démontré qu'il y a un seul point x dans K tel que $x \notin \bigcup_{U \in \bar{\Phi}(\varphi)} U$. Posons $\bar{\varphi}(\varphi) = x$.

Ainsi nous avons défini une application $\bar{\varphi}: \mathcal{B}\mathcal{O}_X \longrightarrow K$. Notons que $\bar{\varphi} \circ \kappa = \varphi$; car si $x \in X$, alors $x \notin u(x)$, donc $x \notin V$ pour tout $V \in \kappa \circ u(x) = \kappa(x)$; par conséquent, $\varphi(x) \notin U$ pour tout ouvert U de K tel que $U \in \bar{\Phi}(\kappa(x))$, c'est à dire que $\varphi(x) = \bar{\varphi}(\kappa(x))$.

$\bar{\varphi}$ est continue: Prenons $\varphi \in \mathcal{B}\mathcal{O}_X$. Soit V un voisinage de $\bar{\varphi}(\varphi)$. Soient U et U_1 des voisinages de $\bar{\varphi}(\varphi)$ tels que $U_1 \ll U \ll V$. Comme ci-dessus on montre que $\varphi^{-1}(U^\perp) \in \varphi$. L'ouvert $W = Z_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}(U^\perp))$ est un voisinage de φ . Si $\varphi^{-1}(U^\perp) \in \eta$, alors $\bar{\varphi}(\eta) \notin U^\perp$ d'après la définition de $\bar{\varphi}$; donc $\bar{\varphi}(W) \subseteq K \setminus U^\perp \subseteq V$. Ainsi nous avons démontré la continuité de $\bar{\varphi}$.

θ est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés; $\mathcal{B}$ est un foncteur de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces compacts. Par con-

séquent, le foncteur composé $\bar{B} = B\theta$ est un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces compacts. Le théorème 4.3 montre que $\bar{B}$ est une réflexion.

La proposition suivante donne un autre lien entre l'espace de Stone-Cech-Isbell et le compactifié de Stone-Čech.

PROPOSITION 4.4. - Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté complet qui admet un espace X d'éléments premiers vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(i) \bigwedge_{x \in X} x = 0 .$$

(ii) Pour tout élément $t \neq 1$ de T , il existe $x \in X$ tel que $t \leq x$.

Alors l'application $x \mapsto k(x)$ de X dans BX est une compactification de Stone-Čech de X .

Démonstration. L'application $a \mapsto S_X(a)$ est un morphisme de T dans $\mathcal{O}_X$. Elle induit une application continue $\varphi = BS_X$ de $B\mathcal{O}_X$ dans BT . En vertu de (i) et I.2.6a, $a \mapsto S_X(a)$ est une bijection entre les pseudo-compléments de T et les ouverts réguliers de X . D'après le corollaire 1 de 3.5, φ est donc surjective. S_X est surjective et d'après l'hypothèse (ii),

$$S_X(a) \perp \vee S(b) = S_X(a \perp \vee b) = 1 \text{ entraîne } a \perp \vee b = 1 .$$

D'après le corollaire de 3.6, φ est donc aussi injective. En utilisant les définitions des applications u, κ, φ on démontre facilement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\kappa} & B\mathcal{O}_X \\ u \downarrow & \swarrow \varphi & \\ BT & & \end{array}$$

En vertu de I.3.5, l'espace ξT de tous les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet T vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la proposition précédente. On a donc :

COROLLAIRE 1. - Si T est un treillis algébrique distributif complet, l'application $x \mapsto k(x)$ de l'espace ξT de tous les éléments premiers de T dans l'espace compact BT est une compactification de Stone-Čech.

Ce corollaire montre que BT est dans un sens le meilleur espace compact que l'on puisse associer à T .

Si T est un treillis algébrique distributif complet plat, tout élément premier de T est maximal d'après I.6.5. On a donc :

COROLLAIRE 2. - Si T est un treillis algébrique complet distributif plat, BT est un compactifié de Stone-Čech de l'espace μT des éléments maximaux de T .

D'après I.3.3, les hypothèses de 4.4 sont aussi vérifiées si X est l'espace des éléments maximaux d'un treillis distributif complet μ -semi-simple dont le plus grand élément est compact. Donc :

COROLLAIRE 3. - Soit T un treillis distributif complet μ -semi-simple, dont le plus grand élément est compact. Alors $x \mapsto k(x)$ est une compactification de Stone-Čech de μT .

Considérons maintenant un treillis algébrique distributif complet T .

DEFINITION 4.5. - Pour tout c-r-idéal maximal φ de T soit

$$\gamma(\varphi) = \bigvee_{a \in \varphi} a ;$$

$\gamma(\varphi)$ est appelé élément absolument germinal associé à φ .

PROPRIETES 4.6. - Soit $\mathcal{P}$ un c-r-idéal maximal d'un treillis algébrique distributif complet T .

(a) Si $\gamma(\mathcal{P}) < 1$, il existe un élément premier x de T tel que $\mathcal{P} = k(x)$.

(b) Si x est un élément premier de T tel que $\gamma(\mathcal{P}) \leq x$, alors $\gamma(\mathcal{P}) \leq p$ pour tout élément premier p tel que $p \leq x$.

(c) $\gamma(\mathcal{P})$ est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers minimaux.

(d) Si le plus grand élément 1 de T est compact, $\gamma(\mathcal{P}) < 1$ et il existe un élément maximal x de T tel que $\mathcal{P} = k(x)$. Si cet élément maximal x est unique, $\gamma(\mathcal{P})$ est le plus petit élément x -primaire de T et $\gamma(\mathcal{P}) = \gamma(x)$, l'idéal germinal associé à x .

Démonstration. (a) Tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Si $\gamma(\mathcal{P}) < 1$, il existe un élément premier $x < 1$ majorant $\gamma(\mathcal{P})$. Il s'ensuit que $\mathcal{P} \subseteq k(x)$; puisque $\mathcal{P}$ et $k(x)$ sont des c-r-idéaux maximaux, on a donc $\mathcal{P} = k(x)$.

(b) Supposons que $\gamma(\mathcal{P}) \leq x$, où x est un élément premier. Soit k un élément compact de T tel que $k \leq \gamma(\mathcal{P})$. Alors $k \in \mathcal{P}$. Il y a donc un c-r-voisinage b de k , appartenant à $\mathcal{P}$. Puisque $k^\perp \vee b = 1$, et $b \leq x$, on a nécessairement $k^\perp \not\leq p$ pour tout élément $p \leq x$. Si p est de plus premier, on en tire $k \leq p$. Ceci étant vrai pour tout élément compact $k \leq \gamma(\mathcal{P})$, on a aussi $\gamma(\mathcal{P}) \leq p$.

(c) est une conséquence immédiate de (b), puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

(d) Supposons que 1 soit un élément compact. Puisque $\mathcal{P}$ est un idéal propre de T , il ne contient pas 1 et par suite $\gamma(\mathcal{P}) < 1$. D'après I.3.3, il y a un élément maximal $x \geq \gamma(\mathcal{P})$; donc $\mathcal{P} = k(x)$.

Si cet élément maximal x est unique, alors $\gamma(\varphi)$ est x -primaire. D'après (b) et (c), φ est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux majorés par x .

PROPOSITION 4.7. - Soit T un treillis algébrique distributif complet projetable. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace πT des éléments premiers minimaux de T sur un sous-espace ouvert de BT . Pour tout $p \in \pi T$, $p = \gamma k(p)$. Pour tout élément compact c de T , $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{BT}(c^+)$. Les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT et ils sont compacts.

Démonstration. Puisque T est projetable, on a $c^+ \vee c^{++} = 1$ donc $c^{++} \ll c^+$ pour tout élément compact c de T . Soit p un élément premier minimal de T . Si c est un élément compact tel que $c \leq p$, alors $c^{++} \leq p$ d'après le corollaire 3 de I.4.4. Donc $c^{++} \in k(p)$. Par conséquent $p = \gamma k(p)$. Ceci montre aussi que $p \mapsto k(p)$ est une application injective de T dans BT .

Soit c un élément compact de T . On a $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{BT}(c^+)$. En effet, si $c \not\leq p \in \pi T$, alors $c^+ \not\leq p$ et par suite $c^+ \notin k(p)$ puisque $c^+ \ll c^+$. Soit réciproquement φ un c -r-idéal maximal contenant c^+ . Alors c n'appartient pas à φ . Il s'ensuit que $c \not\leq \gamma(\varphi)$. D'après 4.6c, il existe un élément premier minimal p tel que $\gamma(\varphi) \leq p$ et $c \not\leq p$. Donc $\varphi = k(p)$ et $p \in S_{\pi T}(c)$.

Puisque les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT et puisque $Z_{BT}(c^+)$ est une partie ouverte de BT , l'application $p \mapsto k(p)$ est ouverte. Puisque cette application est continue d'après 4.2 et injective,

πT est homéomorphe à son image. D'après la proposition 2.5, $Z_B(c^+)$ est compact. Donc $S_{\pi T}(c)$ est aussi compact. D'après le corollaire 4 de I.4.4, les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT .

Utilisant I.6.5, on obtient pour les treillis plats la proposition suivante :

COROLLAIRE. - Soit T un treillis algébrique distributif complet plat. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace μT des éléments maximaux de T sur un sous-espace ouvert de BT . Pour tout $x \in \mu T$, $x = \gamma k(x)$. Les ensembles de la forme $S_{\mu T}(c)$, c compact, sont compacts et ils forment une base de la topologie de μT .

Chapitre III

REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX

RETICULES. APPLICATIONS

1. Annéloïdes réticulés.

Dans cette section, nous définissons la notion d'annéloïde réticulé qui généralise les notions de groupe réticulé et d'anneau réticulé. Nous démontrons quelques propriétés d'annéloïdes réticulés, utilisant les propriétés correspondantes des groupes et anneaux réticulés que l'on trouve par exemple dans L. Fuchs [15] et P. Conrad [9].

Rappelons qu'un groupe réticulé est un groupe A muni d'une structure de $\vee$ -demi-treillis telle que pour tout a, b, c dans A ,

$$(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c) \quad \text{et} \quad c + (a \vee b) = (c + a) \vee (c + b) .$$

(Nous noterons la loi de groupe additivement bien que nous ne supposons pas que le groupe soit commutatif.) Dans un groupe réticulé A , on définit

$$a \wedge b = -(-a \vee -b) \quad \text{quels que soient } a, b \text{ dans } A ;$$

par rapport à $\vee$ et $\wedge$, A est un treillis et on a pour tout a, b, c dans A ,

$$(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c) \quad \text{et} \quad c + (a \wedge b) = (c + a) \wedge (c + b) .$$

Pour tout élément a d'un groupe réticulé A , on note

$$a^+ = a \vee 0 \quad , \quad a^- = -a \vee 0 \quad , \quad |a| = a \vee -a \quad ,$$

$$\text{et on a :} \quad a = a^+ - a^- \quad , \quad |a| = a^+ + a^- .$$

On désigne par A^+ l'ensemble des éléments a de A tels que $a \geq 0$; ces éléments sont appelés positifs. Deux éléments a et b sont dits orthogonaux si $|a| \wedge |b| = 0$, et deux parties M et N de A sont dites orthogonales si tout élément de M est orthogonal à tout élément de N .

DEFINITION 1.1. - On appelle annéloïde réticulé tout groupe réticulé A muni d'une multiplication $(a,b) \mapsto ab$, qui est distributif par rapport à l'addition et telle que

$$(A1) \quad a, b \in A^+ \text{ entraîne } ab \in A^+ .$$

Un annéloïde totalement ordonné est un annéloïde réticulé dont l'ordre est total.

Rappelons qu'un anneau réticulé est un annéloïde réticulé dont l'addition est commutative et dont la multiplication est associative.

Un groupe réticulé A peut être considéré comme un annéloïde réticulé en définissant une multiplication par

$$ab = 0 \text{ quels que soient } a, b \text{ dans } A .$$

Un tel annéloïde sera appelé zéro annéloïde. En général, nous ne ferons pas de distinction entre groupe réticulé et zéro annéloïde réticulé. Pour un annéloïde quelconque A , nous désignons par A_0 le groupe réticulé additif sous-jacent.

Rappelons qu'une classe d'algèbres universelles (de même type) est appelée une variété si elle est stable pour la formation de produits, de sous-algèbres et d'algèbres quotient. D'après un théorème de Birkhoff [4], p. 153, une classe d'algèbres universelles est une variété si, et seulement si, elle peut être définie par des identités. Les groupes réticulés et les anneaux réticulés respective-

ment forment des variétés. Puisque l'axiome (A1) équivaut à

(A1') $(a \vee 0)(b \vee 0) \wedge 0 = 0$ quels que soient a, b dans A , les annéloïdes réticulés forment aussi une variété. Nous utilisons les notions de produit d'annéloïdes réticulés, de sous-annéloïde réticulé, d'annéloïde réticulé quotient, d'homomorphisme et d'isomorphisme d'annéloïdes réticulés conformément aux notions générales correspondantes de la théorie des algèbres universelles.

On sait que le noyau d'un homomorphisme de groupes réticulés est un sous-groupe distingué sous-treillis convexe. Inversement, si i est un sous-groupe distingué sous-treillis convexe d'un groupe réticulé A , le groupe quotient A/i possède une unique structure de groupe réticulé telle que l'application canonique de A sur A/i soit un homomorphisme de groupes réticulés.

DEFINITION 1.2. - Une partie i d'un annéloïde réticulé A est appelée idéal, si i est un sous-groupe distingué du groupe additif A , si i est un sous-treillis convexe du treillis A et si pour tout $a \in A$ et tout $c \in i$, ac et ca appartiennent aussi à i .

On vérifie facilement que $0a = a0 = 0$ pour tout élément a d'un annéloïde réticulé A . Il s'ensuit que le noyau de tout homomorphisme d'annéloïdes réticulés est un idéal. Inversement, si i est un idéal d'un annéloïde réticulé A , le groupe réticulé quotient A/i devient un annéloïde réticulé si l'on définit une multiplication sur A/i par $(a+i)(b+i) = ab+i$. Ainsi nous avons :

PROPOSITION 1.3. - Soit A un annéloïde réticulé. Le noyau de tout homomorphisme de A est un idéal de A . Réciproquement, si i est un idéal de A , le groupe réticulé quotient A/i possède

une unique structure d'annéloïde réticulé telle que l'application canonique de A sur A/I devienne un homomorphisme.

PROPRIETE 1.4. - L'ensemble $\mathcal{I}(A)$ des idéaux d'un annéloïde réticulé A est un treillis algébrique complet distributif, sous-treillis complet du treillis $\mathcal{I}(A_0)$ des idéaux du groupe réticulé A_0 sous-jacent de A .

En effet, puisque l'intersection et la somme d'une famille d'idéaux de A est encore un idéal de A , $\mathcal{I}(A)$ est un sous-treillis complet algébrique de $\mathcal{I}(A_0)$. Puisque $\mathcal{I}(A_0)$ est distributif, il en est de même de $\mathcal{I}(A)$.

1.5. - Pour toute partie M de A , soit $\langle M \rangle$ l'idéal de A engendré par M . On note $\langle a \rangle$ au lieu de $\langle \{a\} \rangle$. On a :

$$(1.5a) \quad \langle a \rangle = \langle |a| \rangle ,$$

$$(1.5b) \quad \langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle |a| + |b| \rangle = \langle |a| \vee |b| \rangle$$

quels que soient a, b dans A , car ces mêmes égalités sont vraies pour les idéaux d'un groupe réticulé. Donc tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est principal et les éléments compacts du treillis $\mathcal{I}(A)$ sont les idéaux principaux.

1.6. - Un idéal x d'un annéloïde réticulé A est dit irréductible si x est un élément irréductible du treillis $\mathcal{I}(A)$. Puisque $\mathcal{I}(A)$ est distributif, tout élément irréductible de $\mathcal{I}(A)$ est premier. Un annéloïde réticulé A est dit irréductible si l'idéal $\{0\}$ est irréductible.

On dit qu'un idéal x est une valeur d'un élément a de A , si x est une valeur de $\langle a \rangle$ dans le treillis algébrique $\mathcal{I}(A)$, c'est à dire si x est maximal dans la famille des idéaux

de A ne contenant pas a . Remarquons que toute valeur est un idéal irréductible.

PROPRIETE 1.7. - Le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux d'un annéloïde réticulé A est un treillis de Brouwer $\cap$ -distributif général. Tout idéal de A est l'intersection d'une famille d'idéaux irréductibles.

Compte tenu de I.3.5, cette propriété est une conséquence de 1.4.

Tout treillis de Brouwer est pseudo-complémenté. Donc $\mathcal{I}(A)$ est pseudo-complémenté. On désigne par i^+ le pseudo-complément d'un idéal quelconque i de A . Si M est une partie de A , on note M^+ au lieu de $\langle M \rangle^+$, et si a est un élément de A , on note a^+ au lieu de $\langle a \rangle^+$.

DEFINITION 1.8. - Pour toute partie M d'un annéloïde réticulé A , M^+ est appelé la polaire de M , et M^{++} la bipolaire. Deux éléments a et b de A sont dits disjoints si $a \in b^+$, et deux parties M et N de A sont dites disjointes si $N \subseteq M^+$.

D'après le théorème de Glivenko (I.1.3), nous avons :

PROPOSITION 1.9. - Soit A un annéloïde réticulé. Pour toute partie M de A , on a $M^{+++} = M^+$, et $i \mapsto i^{++}$ est une fermeture dans $\mathcal{I}(A)$. Les polaires forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}(A)$, image homomorphe du treillis $\mathcal{I}(A)$.

La borne inférieure dans $\mathcal{B}(A)$ est l'intersection. Nous désignerons par $p \vee q$ la borne supérieure dans $\mathcal{B}(A)$ de deux polaires p et q . On a :

$$(1.9a) \quad p \vee q = (p + q)^{++}.$$

D'après 1.5, nous avons :

$$(1.9b) \quad a^\perp = |a|^\perp, \quad a^{\perp\perp} = |a|^{\perp\perp}.$$

$$(1.9c) \quad a^{\perp\perp} \vee b^{\perp\perp} = (|a| + |b|)^{\perp\perp} = (|a| \vee |b|)^{\perp\perp}$$

quels que soient a, b dans A .

Un annéloïde réticulé A est la somme directe de deux idéaux i et j si $i + j = A$ et $i \cap j = 0$. On appelle facteur direct de A tout idéal i pour lequel il existe un idéal j tel que A est la somme directe de i et j . Puisque le treillis des idéaux de A est distributif et pseudo-complémenté, on a :

PROPOSITION 1.10. - Soit A un annéloïde réticulé. Pour un idéal i de A les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $i + i^\perp = A$;
- b) $i = i^{\perp\perp}$ et $i + i^\perp = A$;
- c) A est la somme directe de i et $i^\perp$;
- d) i est un facteur direct de A ;
- e) i admet un complément dans le treillis $\mathcal{J}(A)$.

Les facteurs directs de A forment un treillis de Boole $\mathcal{D}(A)$, sous-treillis de $\mathcal{J}(A)$ et sous-treillis de Boole de $\mathcal{B}(A)$.

DEFINITION 1.11.- On appelle f-annéloïde tout annéloïde réticulé A vérifiant les conditions suivantes :

- (A2) $a \wedge b = 0$ et $c \geq 0$ entraîne $a \wedge (c + b - c) = 0$;
- (A3) $a \wedge b = 0$ et $c \geq 0$ entraîne $a \wedge bc = a \wedge cb = 0$.

Puisqu'un groupe réticulé est dit représentable s'il vérifie (A2) et puisqu'un anneau réticulé vérifiant (A3) est appelé f-anneau, la notion de f-annéloïde est la généralisation logique des notions de groupe réticulé représentable et de f-anneau. Les propriétés (A2)

et (A3) sont équivalentes respectivement aux propriétés (A2') et (A3') suivantes :

$$(A2') \quad a^+ \wedge (c^+ + a^- - c^+) = 0 \quad \text{quels que soient } a, c \text{ dans } A ;$$

$$(A3') \quad a^+ \wedge c^+ a^- = a^+ \wedge a^- c^+ = 0 \quad \text{quels que soient } a, c \text{ dans } A .$$

Par conséquent, les f-annéloïdes forment une variété d'annéloïdes réticulés. Tout annéloïde totalement ordonné est un f-annéloïde. Nous verrons que la variété des f-annéloïdes est engendré par les annéloïdes totalement ordonnés.

Soit M une partie non vide d'un annéloïde réticulé A . La polaire M^+ est contenu dans l'orthogonal M' de M . Car si b est un élément de M et a un élément de A tel que $|a| \wedge |b| > 0$, alors $|a| \wedge |b|$ est un élément non nul appartenant à $\langle M \rangle \cap \langle a \rangle$; donc a n'appartient pas à M^+ . On peut caractériser les f-annéloïdes de la manière suivante :

PROPOSITION 1.12. - Un annéloïde réticulé A est un f-annéloïde si, et seulement si, l'orthogonal de toute partie M de A est un idéal.

Démonstration. Soit A un f-annéloïde. Pour tout élément a de A , l'orthogonal a' est un idéal d'après (A2) et (A3). Puisque l'orthogonal M' de M est l'intersection des a' ($a \in M$), M' est aussi un idéal. Inversement, si A est un annéloïde réticulé tel que l'orthogonal de tout élément a de A est un idéal, les propriétés (A2) et (A3) sont vérifiées.

Ainsi, dans un f-annéloïde A , la polaire M^+ d'une partie quelconque M de A coïncide avec l'orthogonal M' de M .

PROPOSITION 1.13. - Un idéal x d'un f-annéloïde A est irréductible si, et seulement si, A/x est totalement ordonné.

Démonstration. Si A/x est totalement ordonné, les idéaux de A/x forment une chaîne. Donc x ne peut pas être représenté comme l'intersection de deux idéaux le contenant proprement. Soit inversement x irréductible. L'annéloïde réticulé quotient A/x est un f-annéloïde. Pour tout élément $\bar{a}$ de A/x , l'orthogonal et le biorthogonal de $\bar{a}$ sont deux idéaux de A/x , dont l'intersection est réduite à zéro. Donc $\bar{a}$ ou son orthogonal est zéro quel que soit $\bar{a}$ dans A/x , ce qui entraîne que A/x est totalement ordonné.

COROLLAIRE 1. - Tout idéal d'un f-annéloïde contenant un idéal irréductible est lui-même irréductible.

COROLLAIRE 2. - Pour un annéloïde réticulé A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) A est un f-annéloïde.
- b) A/x est totalement ordonné pour tout idéal irréductible x de A .
- c) A est un produit sous-direct d'annéloïdes totalement ordonnés.

PROPOSITION 1.14. - Le treillis $\mathcal{J}(A)$ des idéaux d'un f-annéloïde est arithmétique.

Démonstration. D'après 1.5, les éléments compacts de $\mathcal{J}(A)$ sont les idéaux principaux. Montrons que l'intersection de deux idéaux principaux $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ est encore principal. Remarquons d'abord que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle |a| \wedge |b| \rangle$ dans tout annéloïde totalement ordonné. Si f est un homomorphisme surjectif d'un annéloïde réticulé A ,

on a $f(\langle a \rangle) = \langle f(a) \rangle$. Par conséquent, la formule

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle |a| \wedge |b| \rangle$$

est valable modulo tout idéal x tel que A/x soit totalement ordonné. Puisque tout idéal est une intersection d'idéaux irréductibles et puisque, dans un f-anneau, A/x est totalement ordonné pour tout idéal irréductible x , on a dans un f-anneau A ,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle |a| \wedge |b| \rangle,$$

ce qui montre que l'intersection de deux idéaux principaux est principal.

D'après cette dernière proposition, on peut appliquer les résultats de I.4 à des f-annéloïdes.

Soit A un annéloïde réticulé et X un ensemble d'idéaux irréductibles de A . Puisque tout idéal irréductible est un élément premier du treillis des idéaux de A , on peut munir X d'une topologie comme dans I.2, et nous parlerons de l'espace topologique X d'idéaux irréductibles. Nous désignerons par πA (resp. μA) l'espace des idéaux irréductibles minimaux (resp. maximaux) de A . Nous dirons que A est μ -semi-simple, si l'intersection des idéaux maximaux de A est réduite à zéro.

PROPOSITION 1.15. - Tout espace d'idéaux irréductibles deux à deux non comparables d'un f-annéloïde est séparé.

Démonstration. Soient x_1 et x_2 deux idéaux irréductibles non comparables d'un f-annéloïde A . Il existe des éléments positifs a_1 et a_2 tels que $a_1 \in x_1$, $a_2 \in x_2$ et $a_1 \notin x_2$, $a_2 \notin x_1$. Soient $\bar{a}_1 = a_1 - (a_1 \wedge a_2)$, $\bar{a}_2 = a_2 - (a_1 \wedge a_2)$.

alors $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 = 0$ et $\bar{a}_1 \in x_1$, $\bar{a}_2 \in x_2$ et $\bar{a}_1 \notin x_2$, $\bar{a}_2 \notin x_1$.

Puisque A est un f -annéloïde, on a :

$$\langle \bar{a}_1 \rangle \cap \langle \bar{a}_2 \rangle = \{0\},$$

et

$$\langle \bar{a}_1 \rangle \not\subseteq x_2, \langle \bar{a}_2 \rangle \not\subseteq x_1.$$

Par conséquent, tout espace X d'idéaux irréductibles deux à deux non comparables est séparé d'après I.2.3f.

2. Faisceaux d'annéloïdes réticulés.

En vue des applications, la définition classique de la notion de faisceau nous semble la plus appropriée à nos fins. Nous donnons d'abord cette définition. Evidemment, les faisceaux d'annéloïdes réticulés ont des propriétés analogues aux propriétés des faisceaux d'anneaux (cf. [13]).

DEFINITION.2.1. - Soient X et E deux espaces topologiques et η un homéomorphisme local de E sur X . Soit $E \nabla E$ le sous-espace de l'espace produit $E \times E$, constitué par les couples (s, t) tels que $\eta(s) = \eta(t)$. Supposons que pour tout x dans X , la fibre $E_x = \eta^{-1}(x)$ porte une structure d'annéloïde réticulé telle que les applications

$$(s, t) \longmapsto s + t, \quad (s, t) \longmapsto st, \quad (s, t) \longmapsto s \vee t$$

de $E \nabla E$ dans E soient continues. Alors le triple $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est appelé faisceau d'annéloïdes réticulés sur X . Si chaque fibre E_x est un groupe réticulé (respectivement un anneau réticulé, un groupe réticulé représentable, un f-anneau, un anneau totalement ordonné ...) on parle de faisceau de groupes réticulés (respectivement d'anneaux réticulés, de groupes réticulés représentables, de f-anneaux, ...). Un faisceau $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est dit séparé si E est un espace topologique séparé.

Si $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés, l'application $t \longmapsto -t$ est un homéomorphisme de E sur E , comme dans un faisceau d'anneaux. Puisque $s \wedge t = -(-s \vee -t)$, on en déduit que $(s, t) \longmapsto s \wedge t$ est une application continue de $E \nabla E$ dans E .

DEFINITION 2.2. - Soient $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ et $\mathcal{G} = \langle F, \zeta, Y \rangle$ deux faisceaux d'annéloïdes réticulés. Un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un couple $\Phi = (\varphi, \varphi')$, où $\varphi: X \longrightarrow Y$ est une application continue et $\varphi': X \nabla F \longrightarrow E$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, $t \longmapsto \varphi'(x, t)$ soit un homomorphisme d'annéloïdes réticulés de $F_{\varphi(x)}$ dans E_x . (Ici $X \nabla F$ désigne le sous-espace de l'espace produit $X \times F$, formé par les couples (x, t) tels que $\varphi(x) = \zeta(t)$.)

Si $\Phi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme et si $\Psi = (\psi, \psi')$ est un morphisme de $\mathcal{G}$ dans un faisceau d'annéloïdes réticulés $\mathcal{H} = \langle H, \xi, Z \rangle$, on définit $\Psi\Phi = (\chi, \chi')$ par

$$\chi = \psi \circ \varphi, \quad \chi'(x, t) = \psi'(\varphi(x), \varphi'(x, t))$$

pour tout couple $(x, t) \in X \times F$ tel que $\psi \circ \varphi(x) = \xi(t)$. Alors $\Psi\Phi$ est un morphisme du faisceau $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$. Ainsi nous avons défini une composition de morphismes. Les faisceaux d'annéloïdes réticulés et les morphismes forment une catégorie.

2.3. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés. On appelle section de $\mathcal{F}$ toute application continue $\sigma: X \longrightarrow E$ telle que $\eta \circ \sigma = \text{id}_X$ et on désigne par $\Gamma(\mathcal{F})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$.

L'application $x \longmapsto 0_x$, où 0_x désigne l'élément zéro de E_x , est une section de $\mathcal{F}$ notée 0 . Si deux sections coïncident en un point x de X , elles coïncident même dans un voisinage de x . Il s'ensuit que le support de toute section σ , c'est à dire

$$\text{supp } \sigma = \{x \in X; \sigma(x) \neq 0_x\},$$

est une partie fermée de X . On désigne par $\Gamma_k(\mathcal{F})$ l'ensemble des sections à supports quasi-compacts de $\mathcal{F}$.

Soient $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{F})$. Si $*$ désigne l'une des opérations $+, \cdot, \vee, \wedge$, l'application $\sigma * \tau$ de X dans E définie par

$$\sigma * \tau(x) = \sigma(x) * \tau(x) \text{ pour tout } x \in X,$$

est aussi une section de $\mathcal{F}$. Muni des opérations $+, \cdot, \vee, \wedge$, $\Gamma(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé, isomorphe à un sous-annéloïde réticulé du produit des E_x , $x \in X$. Si toutes les fibres E_x sont respectivement des groupes réticulés, des anneaux réticulés, des f-anneaux, des groupes réticulés représentables, des f-annéloïdes, il en est de même de $\Gamma(\mathcal{F})$. On vérifie facilement que $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un idéal de $\Gamma(\mathcal{F})$.

DEFINITION 2.4. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés. Soit Y un sous-espace de X , soit $E' = \eta^{-1}(Y)$ et $\eta' = \eta|_{E'}$. Alors $\mathcal{F}|Y = \langle E', \eta', Y \rangle$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés, appelé faisceau sur Y induit par $\mathcal{F}$. Si $Z \subseteq Y \subseteq X$, il y a un homomorphisme canonique

$$f_Z^Y: \Gamma(\mathcal{F}|Y) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}|Z)$$

défini par $f_Z^Y(\sigma) = \sigma|Z$ pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F}|Y)$. Si Z est réduit à un seul point x , alors f_x^Z est un homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F}|Y)$ dans E_x . Si $Y = X$ et $Z = \{x\}$, cet homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F})$ dans E_x sera noté simplement f_x .

On dit que le faisceau $\mathcal{F}$ possède la propriété d'extension si $f_x: \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow E_x$ est surjectif pour tout $x \in X$, c'est à dire si, pour tout $t \in E$, il existe $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ telle que $\sigma(\eta(t)) = t$.

Soit (Y_μ) une partition de X . Soit f l'homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F})$ dans $\prod_\mu \Gamma(\mathcal{F}|Y_\mu)$ défini par $\text{pr}_\mu \circ f = f_{Y_\mu}^X$. Cet homomorphisme est injectif. Supposons de plus que les Y_μ sont à la

fois ouverts et fermés. Si (σ_μ) est une famille de sections telle que $\sigma_\mu \in \Gamma(\mathcal{F}|_{Y_\mu})$ quel que soit μ , on peut définir une section σ de $\mathcal{F}$ par

$$\sigma(x) = \sigma_\mu(x) \text{ si } x \in Y_\mu,$$

et on a $f_{Y_\mu}^X(\sigma) = \sigma_\mu$ quel que soit μ . Par conséquent, f est aussi surjectif. Ainsi nous avons démontré :

PROPOSITION 2.5. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés et (Y_μ) une partition en ensembles à la fois ouverts et fermés. Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est isomorphe à $\prod_\mu \Gamma(\mathcal{F}|_{Y_\mu})$.

Soit Y une partie à la fois ouverte et fermée de X . D'après 2.5, $\Gamma(\mathcal{F})$ est isomorphe au produit direct de $\Gamma(\mathcal{F}|_Y)$ et de $\Gamma(\mathcal{F}|_{(X \setminus Y)})$. Si l'on identifie $\Gamma(\mathcal{F})$ et ce produit direct, on voit que l'on peut considérer $\Gamma(\mathcal{F}|_Y)$ comme sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$.

Il est clair qu'une proposition analogue à la proposition 2.5 est valable pour $\Gamma_k(\mathcal{F})$.

DEFINITION 2.6. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés et B un sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$. On dit que B vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß si

1) pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ et tout $x \in X$, il existe $\tau \in B$ tel que $\sigma(x) = \tau(x)$;

2) pour tout $\sigma \in B^+$ et pour tout voisinage U d'un élément quelconque $x \in X$, il existe $\tau \in B$ tel que $\tau(x) \geq \sigma(x)$ et $\text{supp}(\tau) \subseteq U$.

DEFINITION 2.7. - Un élément u d'un annéloïde réticulé A

est appelé unité formelle si $u \geq 0$ et si u n'est contenu dans aucun idéal propre de A .

Un élément unité est évidemment une unité formelle. Si $\Gamma(\mathcal{F})$ possède une unité formelle, la propriété faible de Stone-Weierstraß prend une forme plus simple :

LEMME 2.8. - Si $\Gamma(\mathcal{F})$ possède une unité formelle u , la condition 2) de la propriété faible de Stone-Weierstraß peut être remplacée par :

2') Pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x , il existe $\tau \in B$ tel que $\tau(x) \geq u(x)$ et $\text{supp } \tau \subseteq U$.

Démonstration. Il est clair que 2) est en général plus fort que 2'). Supposons que $\Gamma(\mathcal{F})$ contienne une unité formelle u et que B vérifie 1) et 2'). Soient $\sigma \in B^+$, $x \in X$ et U un voisinage de x . Puisque l'idéal de $\Gamma(\mathcal{F})$ engendré par u est $\Gamma(\mathcal{F})$ tout entier, σ est majoré par une section $\sigma_1 + \dots + \sigma_n$, où chaque σ_i est un produit fini de sections $\sigma_{ij} \in \Gamma(\mathcal{F})$, $j = 1, \dots, m_i$, dont au moins une est égal à u . Pour tout σ_{ij} différente de u , choisissons $\tau_{ij} \in B$ tel que $\tau_{ij}(x) = \sigma_{ij}(x)$ selon 1); et si $\sigma_{ij} = u$, choisissons $\tau_{ij} \in B$ tel que $\tau_{ij}(x) \geq u(x)$ et $\text{supp } \tau_{ij} \subseteq U$ selon 2'). Soient τ_i les sections produit obtenues en remplaçant σ_{ij} par τ_{ij} ; soit $\tau = \tau_1 + \dots + \tau_n$. Alors $\tau(x) \geq \sigma(x)$ et $\text{supp } \tau \subseteq U$.

Le lemme 2.8 montre que la propriété faible de Stone-Weierstraß est plus faible que la propriété de Stone-Weierstraß pour les anneaux abstraits de Dauns et Hofmann [12], p. 152. Mais pour les annéloïdes réticulés elle a la même conséquence :

PROPOSITION 2.9. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes
réticulés. Soit B un sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$ vérifiant
la propriété faible de Stone-Weierstraß. Alors B contient $\Gamma_K(\mathcal{F})$.

Démonstration. Si σ est une section à support quasi-compact de $\mathcal{F}$, $\sigma^+ = \sigma \vee 0$ et $\sigma^- = -\sigma \vee 0$ sont aussi des sections à supports quasi-compacts et $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$. Il suffit donc de montrer que tout $\sigma \in \Gamma_K(\mathcal{F})^+$ appartient à B , si B vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß.

Soit donc σ une section positive de $\mathcal{F}$, à support quasi-compact K . Pour tout $x \in K$, il existe $\sigma_x \in B$ tel que $\sigma_x(x) = \sigma(x)$ d'après 1). D'après 2), il existe $\tau_x \in B$ tel que $\tau_x(x) \geq \sigma_x(x)$ et $\text{supp } \tau_x \subseteq U_x$. Les sections σ_x et σ coïncident sur un certain voisinage U'_x de x . Evidemment on peut choisir $\tau_x \geq 0$. Soit $\tau'_x = \tau_x \wedge \sigma_x \in B$. Alors $0 \leq \tau'_x \leq \sigma$ et $\tau'_x(x) = \sigma(x)$. Il existe un voisinage U'_x de x tel que τ'_x et σ coïncident sur U'_x . Puisque K est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_n$ dans K tels que $K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Soit

$$\tau = \tau'_{x_1} \vee \dots \vee \tau'_{x_n} \in B.$$

Alors $0 \leq \tau \leq \sigma$; et si x appartient à K , alors $x \in U_{x_i}$ pour un i , donc $\tau(x) \geq \tau'_{x_i}(x) = \sigma(x)$. Par conséquent, $\tau = \sigma$ et σ appartient à B .

COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés sur un espace quasi-compact X . Alors tout sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$, vérifiant la propriété faible de Stone-Weierstraß, est égal à $\Gamma(\mathcal{F})$ lui-même.

Donnons maintenant une méthode générale pour construire des représentations d'annéloïdes réticulés par des sections dans un faisceau.

CONSTRUCTION CANONIQUE 2.10. - Soit A un annéloïde réticulé et X un espace topologique. Associons à tout élément x de X un idéal $i(x)$ de A de façon que, quel que soit $a \in A$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $a \in i(x)$ est une partie ouverte de X .

(i) Formons la réunion disjointe E des annéloïdes réticulés quotient $E_x = A/i(x)$, $x \in X$.

(ii) Définissons $\eta : E \longrightarrow X$ par $\eta(t) = x$ pour tout $t \in E_x$.

(iii) Pour tout élément a de A et tout $x \in X$, soit $\hat{a}(x)$ l'image de a dans E_x par l'application canonique $A \longrightarrow E_x$. Ainsi $\hat{a}$ est une application de X dans E . Pour toute partie B de A , soit $\hat{B} = \{\hat{a}; a \in B\}$.

(iv) Munissons E de la topologie la plus fine rendant continues toutes les applications $\hat{a} : X \longrightarrow E$, $a \in A$.

On a alors les propriétés suivantes :

(a) Les ensembles de la forme $\hat{a}(U)$ forment une base de la topologie de E , si U parcourt les ouverts de X et a les éléments de A .

(b) Le triple $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés.

(c) $\hat{A}$ est un sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$. L'application $a \longmapsto \hat{a}$ est un homomorphisme; A est isomorphe à $\hat{A}$ si, et seulement si, $\bigcap_{x \in X} i(x) = 0$.

(d) $\mathcal{F}$ possède la propriété d'extension.

(e) Le faisceau $\mathcal{F}$ est séparé si, et seulement si, X est séparé et si le support de toute section $\hat{a}$, $a \in A$, est ouvert.

(f) Si A vérifie la propriété (S-W) suivante :

(S-W) Pour tout $a \in A^+$ et tout voisinage U d'un élément quelconque x de X , il existe $b \in A$ tel que $\hat{b}(x) \subseteq \hat{a}(x)$ et $\text{supp } \hat{b} \subseteq U$;

alors $\hat{A}$ vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß et par conséquent $\Gamma_k(\mathcal{F}) \subseteq \hat{A}$.

Démonstration. (a) Les ensembles de la forme $\hat{a}(U)$, U ouvert, forment une base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur E . En effet, $\emptyset = \hat{a}(\emptyset)$ est de cette forme; l'intersection de $\hat{a}(U)$ et $\hat{b}(V)$, où U et V sont ouverts, est égal à l'ensemble des $t \in E$ tels que $t = \hat{a}(x) = \hat{b}(x)$ pour un $x \in U \cap V$; or, $\hat{a}(x) = \hat{b}(x)$ est équivalent à $a - b \in i(x)$; d'après l'hypothèse, l'ensemble W des $x \in X$ tels que $a - b \in i(x)$ est ouvert; donc $\hat{a}(U) \cap \hat{b}(V) = \hat{a}(W')$, où W' est l'ensemble ouvert $U \cap V \cap W$.

La topologie $\mathcal{T}$ rend continues toutes les applications $\hat{a} : X \longrightarrow E$. Elle est donc moins fine que la topologie $\mathcal{T}'$ la moins fine ayant cette propriété. Inversement, $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$; car si U est un $\mathcal{T}'$ -voisinage ouvert de $t = \hat{a}(x) \in E$, alors $V = \hat{a}^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de x dans X ; il s'ensuit que $\hat{a}(U)$ est un $\mathcal{T}$ -voisinage de t contenu dans U .

(b) Il est clair que $\eta : E \longrightarrow X$ est un homéomorphisme local. Soit $*$ l'une des opérations $+, \cdot, \vee$. L'application $(s, t) \longrightarrow s * t$ de $E \times E$ dans E est continue. Car si $s = \hat{a}(x)$ et $t = \hat{b}(x)$ et si U est un voisinage de $s * t = (a * b)^\wedge(x)$, on peut supposer que $U = (a * b)^\wedge(V)$ pour un voisinage ouvert V de x ; les couples $(\hat{a}(v), \hat{b}(v))$, $v \in V$, forment un voisinage de (s, t) dans $E \times E$ tel que $\hat{a}(v) * \hat{b}(v) \in U$ pour tout $v \in V$. Par conséquent, $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$

est un faisceau.

(c) et (d) sont évidents.

(e) Supposons d'abord que X soit séparé et que le support de toute section $\hat{a}$, $a \in A$, soit ouvert. Soient s et t deux éléments distincts de E . Soient a et b des éléments de A tels que $\hat{a}(\eta(s)) = s$ et $\hat{b}(\eta(t)) = t$. Si $\eta(s) \neq \eta(t)$, il y a des voisinages disjoints U et V respectivement de $\eta(s)$ et $\eta(t)$. On en déduit que $\hat{a}(U)$ et $\hat{b}(V)$ sont des voisinages disjoints respectivement de s et t . Supposons maintenant que $\eta(s) = \eta(t) = x$. Soit U le support de $(a-b)^\wedge$, qui est ouvert d'après l'hypothèse; alors $\hat{a}(U)$ et $\hat{b}(U)$ sont des voisinages disjoints de s et t respectivement.

Supposons inversement que $\mathcal{F}$ soit séparé. Alors X est évidemment séparé. Soit $a \in A$ et $x \in \text{supp } \hat{a}$. L'élément $\hat{a}(x)$ de E possède un voisinage U ne rencontrant pas un certain voisinage de 0_x . Il existe donc un voisinage V de x tel que $\hat{a}(v) \neq 0_v$ pour tout v dans V . Donc V est contenu dans le support de $\hat{a}$, et par conséquent le support de $\hat{a}$ est ouvert.

(f) D'après la construction du faisceau $\mathcal{F}$, tout élément t de E est de la forme $\hat{a}(x)$ avec $\hat{a} \in \hat{A}$. Donc la condition 1) de la propriété faible de Stone-Weierstraß est vérifiée. La condition (S-W) donne la condition 2). On peut donc appliquer 2.9.

Remarque 1. - Si A admet une unité formelle u , la propriété (S-W) s'écrit :

(S-W)' $\left| \begin{array}{l} \text{Pour tout voisinage d'un élément quelconque } x \text{ de } X, \text{ il} \\ \text{existe } b \in A \text{ tel que } \hat{b}(x) \geq \hat{u}(x) \text{ et } \text{supp } \hat{b} \subseteq U. \end{array} \right.$

Cette remarque indique bien à quel point on peut affaiblir dans le cas des annéloïdes réticulés la propriété de Stone Weierstraß de Dauns et Hofmann [12], p. 152.

Remarque 2. - Si A est respectivement un groupe réticulé, un anneau réticulé, un f-annéloïde, un groupe réticulé représentable, un f-anneau, il en est de même de toutes les fibres $E_x = A/I(x)$ du faisceau construit dans 2.10.

3. Représentation sur l'espace d'Isbell.

Soit A un annéloïde réticulé. Rappelons que le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux de A est un treillis distributif algébrique complet pseudo-complémenté (cf. 1.7).

DEFINITION 3.1. - L'espace de Stone-Čech-Isbell associé au treillis $\mathcal{I}(A)$ comme dans la section II.2 est appelé espace d'Isbell de A ; on le note BA .

Rappelons que BA est l'espace des c-r-idéaux maximaux de $\mathcal{I}(A)$ et que les ensembles $Z_B(i) = \{\varphi \in BA ; i \in \varphi\}$ forment une base de la topologie de BA lorsque i parcourt $\mathcal{I}(A)$. D'après le théorème II.2.3, l'espace d'Isbell BA est compact.

D'après 1.10, les facteurs directs de A forment un sous-treillis de Boole $\mathcal{D}$ du treillis de Boole $\mathcal{B}(A)$ des polaires de A . D'après II.2.5, $p \mapsto Z_B(p^+)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ sur le treillis de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de BA .

Soit x un idéal irréductible d'un annéloïde réticulé A . D'après II.1.7, les idéaux qui ont un c-r-voisinage dans x forment un c-r-idéal maximal $k(x)$. D'après le corollaire 1 de la proposition II.4.4, l'application $x \mapsto k(x)$ de l'espace $\{A$ de tous les idéaux irréductibles de A dans BA est une compactification de Stone-Čech ; en particulier, cette application est continue et son image est dense. Ainsi nous avons :

THEOREME 3.2. - Soit A un annéloïde réticulé et ξA l'espace des idéaux irréductibles de A (muni de la topologie de Zariski).
Alors $x \mapsto k(x) : \xi A \longrightarrow BA$ est une compactification de Stone-Čech. Les facteurs directs de A correspondent bijectivement aux parties à la fois ouvertes et fermées de BA .

Ce théorème a les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 1. - BA est connexe si, et seulement si, A n'admet pas de facteur direct non trivial.

COROLLAIRE 2. - Si BA est fini, A est la somme directe d'un nombre fini d'annéloïdes réticulés dont l'espace d'Isbell est réduit à un seul point.

Supposons que $x + y \neq A$ quels que soient les idéaux irréductibles x, y de A . Alors l'ensemble ξA des idéaux irréductibles de A est filtrant supérieurement. Il s'ensuit que l'intersection de deux parties fermées non vides de ξA n'est jamais vide. Donc le compactifié de Stone-Čech de ξA est réduit à un seul point. Nous avons :

PROPOSITION 3.3. - Soit A un annéloïde réticulé tel que $x + y \neq A$ quels que soient les idéaux irréductibles x, y de A .
Alors BA est réduit à un seul point.

Cette proposition montre que l'espace d'Isbell d'un groupe réticulé d'une structure très complexe peut être réduit à un seul point. Exemples : a) Extensions lexicographiques (pour la définition voir [9], p. 50); b) groupes réticulés ayant une unité formelle et un seul idéal maximal; c) Eyrđ [8] a donné un exemple d'un

réticulé archimédien vérifiant les hypothèses de la proposition sans être totalement ordonné ; d) groupes totalement ordonnés.

Soit A un annéloïde réticulé. Pour tout c - r -idéal maximal $\varphi \in BA$ soit $\gamma(\varphi)$ la somme des idéaux appartenant à φ ; $\gamma(\varphi)$ est appelé idéal absolument germinal associé à φ . D'après II.4.6c, $\gamma(\varphi)$ est l'intersection d'une famille d'idéaux irréductibles minimaux. Si $\gamma(\varphi)$ est primaire, il est primaire minimal. En effet, si x est un idéal irréductible maximal contenant $\gamma(\varphi)$, alors $\gamma(\varphi)$ est contenu dans tout idéal irréductible minimal $p \subseteq x$. Un élément a de A appartient à $\gamma(\varphi)$ si, et seulement si, $a^{++} \in \varphi$; puisque l'ensemble $Z_B(a^{++})$ des $\varphi \in BA$ tels que $a^{++} \in \varphi$ est une partie ouverte de BA , l'ensemble des $\varphi \in BA$ tels que $a \in \gamma(\varphi)$ est aussi ouvert. Par conséquent, on peut construire un faisceau sur BA comme dans 2.10. Nous désignerons ce faisceau par $\mathcal{F}^B(A) = \langle \mathcal{L}^B, \eta^B, BA \rangle$. Les fibres de $\mathcal{F}^B$ sont les annéloïdes réticulés quotient $A/\gamma(\varphi)$ et $\mathcal{F}^B$ vérifie les propriétés (a) - (e) de 2.10.

Comme dans 2.10, nous avons un homomorphisme $a \mapsto \hat{a}$ de A sur un sous-annéloïde réticulé $\hat{A}$ de $\Gamma(\mathcal{F}^B(A))$. Cet homomorphisme est injectif, puisque l'intersection des $\gamma(\varphi)$, $\varphi \in BA$, est réduite à zéro. En effet, si $a \in \gamma(\varphi)$ pour tout $\varphi \in BA$, alors a appartient à tout idéal irréductible, puisque tout idéal irréductible x contient $\gamma(h(x))$; donc $a = 0$. D'après la proposition 2.9, le lemme suivant montrera que $\hat{A} = \Gamma(\mathcal{F}^B(A))$.

LEMME 3.4. - $\hat{A}$ vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß.

Démonstration. Il suffit de montrer que la propriété (S-W) de

2.10f est vérifiée. Soit donc a un élément positif de A , soit $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{B}A$ et soit U un voisinage de $\mathcal{U}_0$. On peut supposer que U est égal à l'ensemble $Z_B(p)$ des $\mathcal{U} \in \mathcal{B}A$ contenant une certaine polaire p . Soient q_1 et q_2 des polaires appartenant à $\mathcal{U}_0$ tels que $p \ll q_1 \ll q_2$. Puisque $q_2 + q_1^\perp = A$, il existe c dans q_2 et b dans $q_1^\perp$ tels que $b + c = a$. L'élément c appartenant à $\gamma(\mathcal{U}_0)$, on a $\hat{a}(\mathcal{U}_0) = \hat{b}(\mathcal{U}_0)$. Montrons que le support de $\hat{b}$ est contenu dans U : Le support de $\hat{b}$ est l'ensemble des $\mathcal{U} \in \mathcal{B}A$ tels que $b^{\perp\perp} \notin \mathcal{U}$. Puisque $b \in q_1^\perp$, on a $q_1 \subseteq b^\perp$ et par suite $p \ll b^\perp$. Or, tout c-r-idéal maximal $\mathcal{U}$ contient p ou $b^{\perp\perp}$ d'après II.1.9; donc $b^{\perp\perp} \notin \mathcal{U}$ entraîne $p \in \mathcal{U}$. Par conséquent, le support de b est contenu dans l'ensemble $U = Z_B(p)$ des $\mathcal{U}$ tels que $p \in \mathcal{U}$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant qui peut être considéré comme le résultat central de ce mémoire:

THEOREME 3.5. - Tout annéloïde réticulé A est isomorphe à l'annéloïde de toutes les sections du faisceau $\mathcal{F}^B(A)$ d'annéloïdes réticulés sur l'espace d'Isbell $\mathcal{B}A$.

COROLLAIRE. - Tout anneau réticulé A (resp. tout groupe réticulé) peut être représenté comme l'anneau réticulé (resp. groupe réticulé) de toutes les sections d'un faisceau d'anneaux réticulés (resp. de groupes réticulés) sur l'espace d'Isbell $\mathcal{B}A$.

Maintenant nous allons définir une certaine catégorie d'annéloïdes réticulés telle que tout homomorphisme $f: A \longrightarrow B$ appartenant à cette catégorie induise une application continue $\beta f: \beta B \longrightarrow \beta A$ et un morphisme de faisceau $\mathcal{F}^B(f): \mathcal{F}^B(B) \longrightarrow \mathcal{F}^B(A)$.

DEFINITION 3.6. - Soient A et B deux annéloïdes réticulés. Un homomorphisme $f: A \longrightarrow B$ est dit conforme s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(C1) \quad \langle f(A) \rangle = B ;$$

$$(C2) \quad \text{Pour deux idéaux quelconques } i \text{ et } j \text{ de } A , \\ i \cap j = \{0\} \text{ entraîne } \langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\} .$$

LEMME 3.7. - Soient A et B deux f-annéloïdes. Un homomorphisme $f: A \longrightarrow B$ est conforme si, et seulement si, (C1) est vérifiée.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un homomorphisme $f: A \longrightarrow B$ vérifie (C2) pourvu que A et B soient des f-annéloïdes. Soient donc i et j deux idéaux de A tels que $i \cap j = \{0\}$. Pour tout $a \in i$ et tout $b \in j$, on a $|a| \wedge |b| = 0$, donc $|f(a)| \wedge |f(b)| = 0$. Par conséquent, $f(i)$ et $f(j)$ sont orthogonaux. A l'aide de 1.12, on en déduit que $\langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\}$.

Soient $f: A \longrightarrow B$ et $g: B \longrightarrow C$ deux homomorphismes conformes d'annéloïdes réticulés. Puisque $g(\langle f(A) \rangle) \subseteq \langle g(f(A)) \rangle$, on a

$$C = \langle g(B) \rangle \subseteq \langle g(f(A)) \rangle .$$

Si i et j sont deux idéaux de A tels que $i \cap j = \{0\}$, alors $\langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\}$ et par suite $\langle g(\langle f(i) \rangle) \rangle \cap \langle g(\langle f(j) \rangle) \rangle = \{0\}$, donc $\langle g \circ f(i) \rangle \cap \langle g \circ f(j) \rangle = \{0\}$.

Ainsi nous avons démontré que l'application composée de deux homomorphismes conformes est encore un homomorphisme conforme. Les

annéloïdes réticulés et leurs homomorphismes conformes forment donc une catégorie que nous désignerons par $\mathcal{A}$. Définissons un foncteur $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés.

Pour tout annéloïde réticulé A , soit $\mathcal{J}(A)$ le treillis des idéaux de A , qui est distributif et pseudo-complémenté d'après 1.7. Soit $f: A \longrightarrow B$ un homomorphisme conforme. Pour tout idéal i de A , soit

$$\mathcal{J}(f)(i) = \langle f(i) \rangle.$$

Alors $\mathcal{J}(f)$ est une application de $\mathcal{J}(A)$ dans $\mathcal{J}(B)$. Cette application est un morphisme au sens de II.3.1. En effet, les axiomes (M1) et (M2) sont des conséquences de (C1) et (C2). L'axiome (M3) est vérifié puisque

$$\langle f(i) \rangle + \langle f(j) \rangle = \langle f(i+j) \rangle$$

quels que soient les idéaux i et j de A . Si $g: B \longrightarrow C$ est un autre homomorphisme conforme et si i est un idéal de A , alors

$$(\mathcal{J}(g) \circ \mathcal{J}(f))(i) = \langle g(\langle f(i) \rangle) \rangle \supseteq \langle g(f(i)) \rangle = \mathcal{J}(g \circ f)(i);$$

d'autre part, $g(\langle f(i) \rangle) \subseteq \langle g(f(i)) \rangle$, donc $(\mathcal{J}(g) \circ \mathcal{J}(f))(i) = \mathcal{J}(g \circ f)(i)$.

Par conséquent, $\mathcal{J}(g) \circ \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g \circ f)$. Nous avons :

LEMME 3.8. - $\mathcal{J}$ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés.

D'après le théorème II.3.4, le foncteur composé $B\mathcal{J}$ est un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie des espaces compacts. En concordance avec 3.1, et puisque aucune erreur n'est possible, nous écrirons simplement B au lieu de $B\mathcal{J}$. Avec cette notation nous avons :

THEOREME 3.9. - B est un foncteur contravariant de la catégorie des annéloïdes réticulés dans la catégorie des espaces compacts.

Montrons maintenant qu'un homomorphisme conforme $f: A \longrightarrow B$ induit un morphisme de faisceau $\mathcal{F}^B(f): \mathcal{F}^B(B) \longrightarrow \mathcal{F}^B(A)$. En effet, soient $\mathcal{F}^B(A) = \langle E_1, \eta_1, BA \rangle$ et $\mathcal{F}^B(B) = \langle E_2, \eta_2, BB \rangle$ les faisceaux associés à A et B respectivement comme dans le théorème 3.5.

D'après le théorème 3.9, on a une application continue $Bf: BB \longrightarrow BA$. Soit $\varphi \in BB$. D'après la définition de Bf (cf. chap. II, sec. 3), on a :

$$\mathcal{I}(f)(i) \in \varphi \text{ pour tout idéal } i \in Bf(\varphi).$$

Par conséquent, $f(i) \subseteq \gamma(\varphi)$ pour tout $i \in Bf(\varphi)$; donc :

$$f(\gamma(Bf(\varphi))) = f\left(\sum_{i \in Bf(\varphi)} i\right) = \sum_{i \in Bf(\varphi)} f(i) \subseteq \gamma(\varphi).$$

Nous pouvons donc définir un homomorphisme $t \longmapsto \varphi(\varphi, t)$ de la fibre $(E_1)_{Bf(\varphi)} = A/\gamma(Bf(\varphi))$ dans la fibre $(E_2)_\varphi = B/\gamma(\varphi)$ par

$$\varphi(\varphi, \hat{a} + \gamma(Bf(\varphi))) = f(a) + \gamma(\varphi),$$

c'est à dire par

$$\varphi(\varphi, \hat{a}(Bf(\varphi))) = \hat{f(a)}(\varphi).$$

L'application $(\varphi, t) \longmapsto \varphi(\varphi, t)$ est une application de $BB \nabla E_1$ dans E_2 . Pour montrer que le couple $\mathcal{F}^B(f) = (Bf, \varphi)$ est un morphisme de faisceau, il suffit de démontrer la continuité de φ : Si U est un voisinage de $\hat{f(a)}(\varphi)$ dans E_2 , on peut supposer que $U = f(a)(V)$, où V est un voisinage de φ dans BB . L'image réciproque $W \subseteq BB \nabla E_1$ de V par φ est effectivement un voisinage de $(\varphi, \hat{a}(Bf(\varphi)))$.

Soit $g: B \longrightarrow C$ un deuxième homomorphisme conforme d'annéloïdes réticulés. Un calcul simple montre que

$$\mathcal{F}^B(g \circ f) = \mathcal{F}^B(f) \circ \mathcal{F}^B(g) .$$

Par conséquent, $\mathcal{F}^B$ est un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie des faisceaux d'annéloïdes réticulés à base compacte.

Comme pour les faisceaux d'anneaux, il y a un foncteur contravariant Γ de la catégorie des faisceaux d'annéloïdes réticulés dans la catégorie des annéloïdes réticulés. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$, $\Gamma(\mathcal{F})$ est l'annéloïde réticulé de toutes les sections de $\mathcal{F}$. Si $\psi = (\psi, \psi')$ est un morphisme du faisceau $\mathcal{F}_2 = \langle E_2, \eta_2, X_2 \rangle$ dans le faisceau $\mathcal{F}_1 = \langle E_1, \eta_1, X_1 \rangle$, l'homomorphisme Γf de $\Gamma(\mathcal{F}_1)$ dans $\Gamma(\mathcal{F}_2)$ est défini de la manière suivante: Pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F}_1)$, la section $\tau = (\Gamma f)(\sigma) \in \Gamma(\mathcal{F}_2)$ est définie par

$$\tau(x) = \psi'(x, \sigma(\psi(x))) \text{ pour tout } x \in X_2 .$$

Considérons le cas particulier de $\mathcal{F}^B(f): \mathcal{F}^B(B) \longrightarrow \mathcal{F}^B(A)$.

Alors pour tout $a \in A$,

$[\mathcal{F}^B(f)(\hat{a})](\varphi) = \varphi(\varphi, \hat{a}(Bf(\varphi))) = \hat{f}(a)(\varphi)$ quel que soit $\varphi \in BB$; donc $\mathcal{F}^B(f)(\hat{a}) = \hat{f}(a)$. Puisque $a \longmapsto \hat{a}$ et $b \longmapsto \hat{b}$ sont des isomorphismes de A et B respectivement sur $\Gamma \mathcal{F}^B(A)$ et $\Gamma \mathcal{F}^B(B)$, cela montre que le foncteur composé $\Gamma \mathcal{F}^B: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est équivalent au foncteur identique. Ainsi nous avons démontré le théorème final de cette section:

THEOREME 3.10. - Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des annéloïdes réticulés et de leurs homomorphismes conformes. Alors $\mathcal{F}^B$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des faisceaux d'annéloïdes réticulés à base compacte tel que le foncteur composé $\Gamma \mathcal{F}^B$ soit équivalent au foncteur identique sur $\mathcal{A}$.

4. Représentation sur l'espace de Stone. Enveloppe stonienne et enveloppe orthocomplète d'un f-annéloïde .

Soit A un annéloïde réticulé. Les polaires de A forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}(A)$ (cf. 1.9). Nous désignons par σA l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}(A)$. Nous allons construire un faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A)$ sur σA qui permet de représenter A comme annéloïde réticulé de sections. En général, A n'est pas isomorphe à l'annéloïde réticulé $\Gamma(\mathcal{F}^\sigma(A))$ de toutes les sections de $\mathcal{F}^\sigma(A)$. Nous préciserons les propriétés de $\Gamma(\mathcal{F}^\sigma(A))$. Finalement nous donnerons une construction de l'orthocomplétude d'un f-annéloïde.

PROPOSITION 4.1. - Soit A un annéloïde réticulé. Soit $\mathcal{B}(A)$ le treillis de Boole complet des polaires de A et soit σA l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}(A)$. Pour tout $\varphi \in \sigma A$, soit $\gamma(\varphi)$ la somme des polaires p appartenant à φ . Comme dans 2.10 on peut construire un faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A) = \langle E^\sigma, \eta^\sigma, \sigma A \rangle$ sur σA . Ce faisceau est séparé et A est isomorphe au sous-annéloïde réticulé $\hat{A}$ de $\Gamma \mathcal{F}^\sigma(A)$. Si A est un f-annéloïde, $\mathcal{F}^\sigma(A)$ est un faisceau d'annéloïdes totalement ordonnés.

Démonstration. Soit $\varphi \in \sigma A$. Puisque $\gamma(\varphi)$ est la somme d'une famille de polaires filtrant supérieurement, un élément a de A appartient à $\gamma(\varphi)$ si, et seulement si, $a^{++} \in \varphi$. Or, l'ensemble des $\varphi \in \sigma A$ contenant a^{++} est à la fois ouvert et fermé. Ceci démontre d'abord que les hypothèses de 2.10 sont vérifiées et que l'on peut construire un faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A) = \langle E^\sigma, \eta^\sigma, \sigma A \rangle$ sur σA comme

dans 2.10, dont les fibres sont $A/\gamma(\varphi)$. Puisque l'intersection des idéaux maximaux φ de $\mathcal{B}(A)$ est réduite à zéro, il en est de même de l'intersection des idéaux $\gamma(\varphi)$ de A . Par conséquent, $a \mapsto \hat{a}$ est un homomorphisme injectif de A dans $\Gamma \mathcal{F}^{\sigma}(A)$. De plus, le support de toute section $\hat{a}$, $a \in A$, est ouvert; d'après 2.10e, $\mathcal{F}^{\sigma}(A)$ est donc séparé.

Supposons maintenant que A est un f -annéloïde. Soit $\varphi \in \mathcal{A}$. Si un élément a n'appartient pas à $\gamma(\varphi)$, alors $a^{++} \notin \varphi$. Par conséquent, a^{+} appartient à φ , donc $a^{+} \subseteq \gamma(\varphi)$. Puisque A est un f -annéloïde, a^{+} est l'ensemble des $b \in A$ tels que $|a| \wedge |b| = 0$. Ainsi nous avons montré que $|a| \wedge |b| = 0$ entraîne $a \in \gamma(\varphi)$ ou $b \in \gamma(\varphi)$. Il s'ensuit que la fibre $E_{\varphi}^{\sigma} = A/\gamma(\varphi)$ est totalement ordonnée. Par conséquent, $\mathcal{F}^{\sigma}(A)$ est un faisceau d'annéloïdes totalement ordonnés.

COROLLAIRE. - Tout groupe réticulé représentable A (resp. tout f -anneau) peut être représenté comme groupe réticulé (resp. f -anneau) de sections d'un faisceau séparé de groupes totalement ordonnés (resp. d'anneaux totalement ordonnés) sur l'espace de Stone $\mathcal{S}A$.

Pour tout annéloïde réticulé A , la proposition II.4.1 fournit une application continue surjective $q: A \longrightarrow \mathcal{B}A$.

DEFINITION 4.2. - Un annéloïde réticulé A est dit stonien si toute polaire est un facteur direct de A .

Un annéloïde réticulé A est stonien si, et seulement si, le treillis des idéaux de A est un treillis de Stone (cf. I.6.1). Donnons quelques caractérisations :

PROPOSITION 4.3. - Pour un annéloïde réticulé A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est stonien;
- (b) $q: \mathcal{G}A \longrightarrow \mathcal{B}A$ est un homéomorphisme;
- (c) Les faisceaux $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}(A)$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}(A)$ sont naturellement isomorphes.
- (d) $a \longmapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\Gamma \mathcal{F}^{\mathcal{G}}(A)$.

Démonstration. (a) est équivalent à (b) d'après II.4.1.

(b) $\implies$ (c): Si q est un homéomorphisme, on a pour tout idéal maximal $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, $\gamma(\mathcal{P}) = \gamma(q(\mathcal{P}))$ d'après la construction de q . Il s'ensuit que les faisceaux $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}(A)$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}(A)$ sont isomorphes.

(c) entraîne (d) d'après le théorème 3.5.

(d) $\implies$ (a): Soit p une polaire de A . Les $\mathcal{P} \in \mathcal{G}A$ tels que $p \notin \mathcal{P}$ forment une partie ouverte et fermée U de $\mathcal{G}A$. L'annéloïde réticulé $\Gamma \mathcal{F}^{\mathcal{G}}(A)$ est la somme directe de $\Gamma(\mathcal{F}^{\mathcal{G}}|_U)$ et $\Gamma(\mathcal{F}^{\mathcal{G}}|_{(\mathcal{G}A \setminus U)})$. L'homomorphisme $a \longmapsto \hat{a}$ envoie p dans $\Gamma(\mathcal{F}^{\mathcal{G}}|_U)$ et $p^\perp$ dans $\Gamma(\mathcal{F}^{\mathcal{G}}|_{(\mathcal{G}A \setminus U)})$. Si $a \longmapsto \hat{a}$ est un isomorphisme, A est donc la somme directe de p et $p^\perp$. Par conséquent, A est un annéloïde réticulé stonien.

La deuxième partie de cette section sera consacrée à la notion d'enveloppe stonienne d'un f-annéloïde.

Soit A un f-annéloïde. On appelle extension de A toute f-annéloïde B contenant A comme sous-f-annéloïde. Si B et C sont deux extensions de A , un homomorphisme $f: B \longrightarrow C$ est dit A -homomorphisme si tout élément de A est fixe par f . Nous identifierons les éléments a de A et les sections $\hat{a}$ de $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}(A)$;

ainsi nous considérons $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$ comme extension de A .

DEFINITION 4.4. - Une extension B d'un f-annéloïde A est appelée enveloppe stonienne de A si B est une extension stonienne minimale de A .

Soit B une extension d'un f-annéloïde A . Pour toute polaire p de B , soit $f(p) = p \cap A$. Alors f est un homomorphisme surjectif du treillis de Boole $\mathcal{B}(B)$ des polaires de B sur $\mathcal{B}(A)$. Cet homomorphisme induit une application continue injective $\bar{f}: \sigma A \longrightarrow \sigma B$. Nous identifierons σA avec son image dans σB . Si f est un isomorphisme, nous écrirons $\mathcal{B}(B) \cong \mathcal{B}(A)$; dans ce cas $\bar{f}$ est un homéomorphisme et nous écrirons $\sigma B \cong \sigma A$.

Voici le théorème principal :

THEOREME 4.5. - Soit A un f-annéloïde. Alors $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$ est une enveloppe stonienne de A telle que $\mathcal{B}(\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)) \cong \mathcal{B}(A)$.

Le théorème 4.5 sera démontré en plusieurs étapes. Fixons d'abord les notations : Soit A un f-annéloïde ; soit $\Gamma = \Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$. Pour toute partie ouverte et fermée U de σA , soit $\Gamma^U = \Gamma(\mathcal{F}^\sigma(A)|U)$ et, pour tout $a \in A$, soit a^U la restriction de a à U . On identifie a^U avec la section qui coïncide avec a sur U et qui est nulle ailleurs. Si p est une polaire de A , nous appellerons support de p l'ensemble des $\varphi \in \sigma A$ tels que $p \notin \varphi$. Les supports des polaires de A sont exactement les ouverts fermés de σA .

a) Soit Δ un sous-f-annéloïde de Γ et π une polaire de Δ . Alors il existe un ouvert fermé $U \subseteq \sigma A$ tel que π soit l'ensemble

des $\tau \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau \subseteq U$ et tel que la polaire $\Pi^\perp$ de Π dans Δ soit l'ensemble des $\tau' \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau' \subseteq \sigma A \setminus U$. En effet, soient V la réunion des supports des sections $\tau \in \Pi$ et V' la réunion des supports des sections $\tau' \in \Pi^\perp$. Puisque le faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A)$ est séparé, V et V' sont ouverts. Puisque les fibres de $\mathcal{F}^\sigma(A)$ sont totalement ordonnées, le support de toute section $\tau \in \Pi$ est disjoint du support de toute section $\tau' \in \Pi^\perp$. Donc V et V' sont disjoints. Puisque σA est l'espace de Stone d'un treillis de Boole complet, les adhérences $U = \overline{V}$ et $U' = \overline{V'}$ sont aussi ouverts et disjoints. Toute section τ , dont le support appartient à U , est orthogonal à $\Pi^\perp$; elle appartient donc à Π . Par conséquent, Π est l'ensemble des sections $\tau \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau \subseteq U$. Le raisonnement est le même pour $\Pi^\perp$.

b) Γ est un f-annéloïde stonien; car si Π est une polaire de Γ , il existe d'après a) un ouvert fermé U de σA tel que $\Pi = \Gamma^U$ et $\Pi^\perp = \Gamma^{(\sigma A \setminus U)}$. D'après 2.5, Γ est la somme directe de Γ^U et $\Gamma^{(\sigma A \setminus U)}$.

c) Soit U une partie ouverte et fermée de σA et Δ un sous-f-annéloïde de Γ contenant A . Alors l'ensemble Π des sections $\tau \in \Delta$, dont le support est contenu dans U , est une polaire de Δ ; et la polaire de Π dans Δ est l'ensemble des sections $\tau' \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau' \subseteq \sigma A \setminus U$. En effet, si les supports de deux sections τ et τ' sont disjoints, τ et τ' sont orthogonales. Soit τ' une section dans Δ , dont le support rencontre U . L'ensemble $U' = U \cap \text{supp } \tau'$ est ouvert et fermé. Il existe une polaire $p \neq 0$ de A , dont U' est le support. Soit a un élément non nul de p . Le support de a appartient à U' ; donc $a \in \Pi$;

mais a et τ ne sont pas orthogonales. Par conséquent, $\Pi^\perp$ est l'ensemble des $\tau' \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau' \subseteq \sigma A \setminus U$. De la même façon on montre que $\Pi^{\perp\perp}$ est l'ensemble des $\tau \in \Delta$ telles que $\text{supp } \tau \subseteq U$. On en déduit que $\Pi = \Pi^{\perp\perp}$.

d) Pour toute section $\tau \in \Gamma$, il existe $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans A et une partition de σA en parties ouvertes et fermées $U_1, U_2, \dots, U_n$ telles que

$$\tau = a_1^{U_1} + a_2^{U_2} + \dots + a_n^{U_n}.$$

En effet, soit $\tau \in \Delta$. Pour tout $\varphi \in \sigma A$, soit a_φ un élément de A tel que $a_\varphi(\varphi) = \tau(\varphi)$. Il y a un voisinage U_φ de φ tel que τ et a_φ coïncident sur U_φ . Puisque σA est compact et totalement disconnexe, il existe une partition finie de σA en parties ouvertes et fermées $U_1, U_2, \dots, U_n$, subordonnée au recouvrement $(U_\varphi)_{\varphi \in \sigma A}$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on peut choisir a_i dans A tel que les sections a_i et τ coïncident sur U_i . Il s'ensuit que

$$\tau = a_1^{U_1} + a_2^{U_2} + \dots + a_n^{U_n}.$$

e) Si Δ est un sous-f-annéloïde stonien de Γ contenant A , alors $\Delta = \Gamma$. En effet, soit a un élément de A et U une partie ouverte et fermée de σA . D'après c), l'ensemble Π des sections $\tau \in \Delta$, à supports dans U , est une polaire de Δ et la polaire $\Pi^\perp$ de Π dans Δ est l'ensemble des sections $\tau' \in \Delta$, dont le support ne rencontre pas U . Puisque Δ est stonien, $a = \tau + \tau'$ avec $\tau \in \Pi$ et $\tau' \in \Pi^\perp$. Or a^U et $a^{(\sigma A \setminus U)}$ sont les seules sections dans Γ , à supports dans U et $\sigma A \setminus U$ respectivement, telles que $a = \tau + \tau'$. Par conséquent a^U appartient nécessairement à Δ . D'après d), cela suffit pour affirmer que $\Delta = \Gamma$.

Ainsi nous avons démontré que $\Gamma = \Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$ est une enveloppe stonienne de A . Les deux lemmes suivants montrent que $\mathcal{B}(\Gamma) \cong \mathcal{B}(A)$.

LEMME 4.6 (Bigard [3]). - Soit B une extension d'un f-annéloïde A telle que pour toute polaire p de B , $p \cap A \neq \{0\}$. Alors $\mathcal{B}(B) \cong \mathcal{B}(A)$.

Rappelons que A est dit o-dense dans une extension B si, pour tout élément $b > 0$ de B , il existe un élément a dans A vérifiant $0 < a \leq b$.

LEMME 4.7. - Tout f-annéloïde A est o-dense dans $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$.

Démonstration. Montrons que A est o-dense dans $\Gamma = \Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$. Soit $0 < \tau \in \Gamma$. Soit $\varphi \in \text{supp } \tau$. Il existe un élément $b \in A^+$ tel que $b(\varphi) = \tau(\varphi)$. Puisque le support de τ est ouvert, il existe une partie ouverte et fermée U du support de τ telle que b et τ coïncident sur U . L'ouvert fermé U est le support d'une polaire $p \neq 0$ de A . Soit $c > 0$ un élément de p . Le support de c est contenu dans U . En posant $a = b \wedge c$, on a $0 < a \leq \tau$.

En général, l'enveloppe stonienne n'est pas unique à un A-isomorphisme près. Mais on a le théorème de minimalité et unicité suivant :

PROPOSITION 4.8. - Soit B une enveloppe stonienne d'un f-annéloïde A . Alors il y a un A-homomorphisme surjectif de B sur $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$. Cet A-homomorphisme est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{B}(B) \cong \mathcal{B}(A)$.

Démonstration. Nous avons vu que nous pouvons considérer σA comme un sous-espace de σB . A toute section $\tau \in \Gamma \mathcal{F}^\sigma(B)$, associons sa restriction $\tau|_{\sigma A}$. L'application $\tau \mapsto \tau|_{\sigma A}$ est un homomorphisme de $B = \Gamma \mathcal{F}^\sigma(B)$ dans $\Gamma' = \Gamma(\mathcal{F}^\sigma(B)|_{\sigma A})$. Cet homomorphisme est surjectif, puisque σA est fermé et puisque σB est totalement discontinu. Pour aucun élément non nul $a \in A$, $a|_{\sigma A}$ n'est nul. Nous avons donc un A -homomorphisme. De plus, Γ' est une enveloppe stonienne de A telle que $\mathfrak{B}(\Gamma') \cong \mathfrak{B}(A)$. La proposition suivante achève la démonstration.

PROPOSITION 4.9. - Soit B une extension stonienne d'un f-anné-
loïde A telle que $\mathfrak{B}(B) \cong \mathfrak{B}(A)$. Alors B contient une unique
enveloppe stonienne C de A , et C est isomorphe à $\Gamma \mathcal{F}^\sigma(A)$.

Démonstration. Pour toute polaire p de A , désignons par $[p]$ la projection de B sur $p^\perp$. Définissons une application f de $\Gamma \mathcal{F}^\sigma(A)$ dans B de la manière suivante: Les éléments de $\Gamma \mathcal{F}^\sigma(A)$ sont de la forme

$$\tau = a_1^{U_1} + \dots + a_n^{U_n},$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de A et où $U_1, \dots, U_n$ est une partition de σA en ouverts. Pour $i = 1, \dots, n$, soit p_i la polaire de A , dont U_i est le support. Posons

$$f(\tau) = [p_1]a_1 + \dots + [p_n]a_n.$$

On vérifie que f est une application bien définie et que f est un homomorphisme injectif. De plus, toute extension stonienne de A contenu dans B , contient l'image C de f . Par conséquent, C est l'unique enveloppe stonienne de A contenu dans B et C est isomorphe à $\Gamma \mathcal{F}^\sigma(A)$.

Veksler [40] a énoncé des résultats sur les extensions stoniennes utilisant d'autres méthodes. Il nous semble cependant que le théorème d'unicité de Veksler n'est pas correct.

Dans la dernière partie de cette section nous considérons la notion d'enveloppe orthocomplète d'un f-annéloïde.

DEFINITION 4.10.- Soit A un f-annéloïde. On dit que A est projectable si le treillis des idéaux de A est projectable, c'est à dire si toute polaire principale $a^\perp$ de A est un facteur direct. On dit que A est latéralement complet si toute famille (a_μ) d'éléments deux à deux orthogonaux de A admet une borne supérieure. A est appelé orthocomplet si A est projectable et latéralement complet. Toute extension orthocomplète minimale de A est appelée enveloppe orthocomplète de A .

Tout f-annéloïde ortho-complet B est stonien. En effet, si p est une polaire de B et (a_μ) une famille maximale d'éléments positifs de p deux à deux orthogonaux, alors $p^\perp = (\bigvee_\mu a_\mu)^\perp$. Il s'ensuit que toute polaire de B est principale; puisque B est projectable, il est donc stonien.

Soit A un f-annéloïde. Soit $\mathcal{W}$ la famille des ouverts partout denses de l'espace de Stone $\mathcal{G}A$. Pour tout $U \in \mathcal{W}$, soit

$\Gamma^U = \Gamma(\mathcal{F}^\sigma(A)|U)$ le f-annéloïde des sections définies sur U du faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A)$. Si U et V sont deux membres de $\mathcal{W}$ tels que $V \subseteq U$, soit f_V^U l'homomorphisme de Γ^U dans Γ^V défini par $f_V^U(\tau) = \tau|V$ pour tout $\tau \in \Gamma^U$. Puisque le faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A)$ est séparé, les homomorphismes f_V^U sont injectifs. Si U, V, W sont trois membres de $\mathcal{W}$ tels que $W \subseteq V \subseteq U$, alors

$f_W^U = f_W^V \circ f_V^U$. Puisque la famille $\mathcal{W}$ est stable pour l'intersection, on a un système inductif $\{f_V^U ; V \subseteq U, V \in \mathcal{W}, U \in \mathcal{W}\}$. Soit $\Omega(A)$ la limite inductive de ce système.

Pour tout $U \in \mathcal{W}$, on a un homomorphisme canonique $f^U: \Gamma^U \longrightarrow \Omega(A)$ et cet homomorphisme est injectif. En particulier, on a un homomorphisme injectif $f = f^{\sigma A}: \Gamma \longrightarrow \Omega(A)$. Nous identifierons Γ avec son image dans $\Omega(A)$. Ainsi $\Omega(A)$ devient une extension de Γ et par suite de A .

THEOREME 4.11. - Le f-annéloïde $\Omega(A)$ défini ci-dessus est une enveloppe orthocomplète du f-annéloïde A . Tout élément de $\Omega(A)^+$ est la borne supérieure d'une famille d'éléments deux à deux orthogonaux de l'enveloppe stonienne Γ de A , et A est o-dense dans $\Omega(A)$.

REMARQUE. - D'après le théorème 4.11, $\Omega(A)$ est une orthocomplétion de A au sens de Bernau [2]. La définition de l'enveloppe orthocomplète est plus simple que la définition de l'orthocomplétion de Bernau. Il nous semble aussi que notre construction de $\Omega(A)$ est plus simple que celle de Bernau. Mais l'enveloppe orthocomplète n'est pas unique comme l'est l'orthocomplétion; à la fin de cette section, nous donnerons un théorème d'unicité sous une hypothèse supplémentaire.

Le théorème sera démontré en plusieurs étapes. Fixons d'abord quelques notions: Si $U \in \mathcal{W}$ et $\tau \in \Gamma^U$ et $\omega \in \Omega(A)$, nous dirons que τ représente ω si $f^U(\tau) = \omega$. Si $U \in \mathcal{W}$, $V \in \mathcal{W}$, $\tau \in \Gamma^U$ et $\tau' \in \Gamma^V$, alors τ et τ' représentent le même élément de $\Omega(A)$ si, et seulement si, les sections τ et τ' coïncident sur $U \cap V$.

Si V est un ouvert quelconque de $\mathcal{G}A$, alors $U = V \cup (\mathcal{G}A \setminus \bar{V})$ est un ouvert partout dense de $\mathcal{G}A$. A toute section $\tau \in \Gamma^V$ on associe la section $\tau' \in \Gamma^U$ définie par:

$$\tau'(\varphi) = \begin{cases} \tau(\varphi) & \text{si } \varphi \in V, \\ 0_\varphi & \text{si } \varphi \in \mathcal{G}A \setminus \bar{V}. \end{cases}$$

Si ω désigne l'élément de $\Omega(A)$ représenté par τ' , on dira aussi que τ représente ω .

a) A est o-dense dans $\Omega(A)$; en effet, soit $0 < \omega \in \Omega(A)$. Il existe $U \in \mathcal{W}$ et un représentant $\tau \in \Gamma^U$ de ω . Si V est une partie ouverte et compacte du support de τ , la restriction τ_1 de τ à V appartient à Γ . Puisque A est o-dense dans Γ (4.7), il existe $a \in A$ tel que $0 < a \leq \tau_1 \leq \tau$. Par conséquent, $0 < a \leq \omega$.

b) Tout élément de $\Omega(A)^+$ est la borne supérieure d'une famille (τ_μ) d'éléments de Γ deux à deux orthogonaux. En effet, soit ω un élément positif de $\Omega(A)$. Choisissons $U \in \mathcal{W}$ et un représentant $\tau \in \Gamma^U$ de ω . Soit (τ_μ) une famille maximale de sections $\tau_\mu \in \Gamma$ telles que les supports des τ_μ sont contenus dans U et deux à deux disjoints et telles que τ_μ coïncide avec τ sur $\text{supp } \tau_\mu$. Soient $V = \bigcup_\mu \text{supp } \tau_\mu$ et $U' = V \cup (U \setminus \bar{V}) \in \mathcal{W}$. Si l'on définit

$$\tau'(\varphi) = \begin{cases} \tau_\mu(\varphi) & \text{si } \varphi \in \text{supp } \tau_\mu, \\ 0_\varphi & \text{si } \varphi \in U \setminus \bar{V}, \end{cases}$$

on a $\tau' \in \Gamma^{U'}$ et $\tau' = \bigvee_\mu \tau_\mu$, la borne supérieure étant pris dans $\Gamma^{U'}$. Or τ' représente aussi ω et l'application $f^{U'}: \Gamma^{U'} \rightarrow \Omega(A)$ conserve les bornes supérieures, puisque son image est o-dense dans $\Omega(A)$ (voir [2], p. 116). Donc $\omega = \bigvee_\mu \tau_\mu$.

c) $\Omega(A)$ est latéralement complet. En effet, soit (ω_μ) une

famille d'éléments positifs de $\Omega(A)$ deux à deux orthogonaux. Il existe $U_\mu \in \mathcal{W}$ et des représentants $\tau_\mu \in \Gamma^{U_\mu}$ des ω_μ . Les supports des τ_μ sont deux à deux disjoints. Soient $V = \bigcup_\mu \text{supp } \tau_\mu$ et $U = V \cup (\sigma A \setminus \bar{V}) \in \mathcal{W}$. Si l'on définit

$$\tau(\varphi) = \begin{cases} \tau_\mu(\varphi) & \text{si } \varphi \in \text{supp } \tau_\mu, \\ 0_\varphi & \text{si } \varphi \in \sigma A \setminus \bar{V}, \end{cases}$$

alors $\tau \in \Gamma^U$ et $\omega = \bigvee_\mu \omega_\mu$, où ω désigne l'élément de $\Omega(A)$ représenté par τ .

d) $\Omega(A)$ est projetable: Soit $\omega \in \Omega(A)$ et $\tau \in \Gamma^U$ un représentant de ω . Un élément ω' de $\Omega(A)$ est orthogonal à ω si, et seulement si, ω' admet un représentant τ' dont le support est disjoint du support de τ . Un élément ω'' de $\Omega(A)$ appartient à la bipolaire de ω si, et seulement si, ω'' admet un représentant τ'' dont le support est contenu dans le support U_1 de τ . Soit ζ un élément quelconque de $\Omega(A)$ et σ un représentant de ζ . Soit σ' la restriction de σ sur le support U_1 de τ et σ'' la restriction de σ sur $\sigma A \setminus \bar{U}_1$. Les éléments ζ' et ζ'' de $\Omega(A)$, dont σ' et σ'' respectivement sont des représentants, appartiennent respectivement à la polaire et à la bipolaire de ω et on a $\zeta = \zeta' + \zeta''$. Par conséquent, $\Omega(A) = \omega^\perp + \omega^{\perp\perp}$.

D'après a) - d), $\Omega(A)$ est une extension orthocomplète de A .

e) $\Omega(A)$ est une enveloppe orthocomplète: En effet, soit C un sous-f-annéloïde orthocomplète de $\Omega(A)$ contenant A . D'après a), A est o-dense dans $\Omega(A)$. D'après la proposition 4.9, $\Omega(A)$ contient une seule extension stonienne de A , à savoir Γ . Puisque C est stonien, C contient une enveloppe stonienne de A ; donc $\Gamma \subseteq C$.

Tout élément positif ω de $\Omega(A)$ est la borne supérieure d'une famille (ω_μ) d'éléments de Γ deux à deux orthogonaux. La famille (ω_μ) admet aussi une borne supérieure ω' dans C . Puisque C est o-dense dans $\Omega(A)$, $\omega = \omega'$. Ainsi nous avons démontré que tout élément positif de $\Omega(A)$ appartient à C ; donc $C = \Omega(A)$. Cela achève la démonstration du théorème 4.11.

Puisque A est o-dense dans $\Omega(A)$, on a $\mathcal{B}(\Omega(A)) = \mathcal{B}(A)$. Inversement :

PROPOSITION 4.12. - Soit B une extension orthocomplète d'un f-annéloïde A telle que $\mathcal{B}(B) = \mathcal{B}(A)$. Alors B contient une unique enveloppe orthocomplète D de A , et D est A -isomorphe à $\Omega(A)$.

Démonstration. D'après la proposition 4.9, B contient une unique enveloppe stonienne C de A et il y a un A -isomorphisme $\varphi: \Gamma \longrightarrow C$. Pour tout élément $\omega \in \Omega(A)^+$, il y a d'après 4.11 une famille (ω_μ) d'éléments deux à deux orthogonaux de Γ telle que

$$\omega = \bigvee \omega_\mu$$

Posons

$$\bar{\varphi}(\omega) = \bigvee \varphi(\omega_\mu).$$

On vérifie que $\bar{\varphi}$ est un homomorphisme bien défini de $\Omega(A)$ dans B . L'image D de $\bar{\varphi}$ est une enveloppe orthocomplète de A contenue dans B . Soit D' une extension orthocomplète de A contenu dans B . Puisque toute extension orthocomplète est stonienne, D' contient C . Puisque $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(B)$, la borne supérieure d'une famille d'éléments deux à deux orthogonaux de C dans D' est égale à la borne supérieure de cette famille dans B . Par conséquent, $D \subseteq D'$.

5. Représentation sur l'espace des idéaux irréductibles minimaux. Annéloïdes réticulés projetables.

Dans cette section, nous donnerons d'abord une construction assez générale d'une représentation d'un annéloïde réticulé A par des sections d'un faisceau sur un espace d'idéaux irréductibles de A . Nous appliquerons cette construction pour l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A . Cette représentation sera particulièrement intéressante dans le cas d'un annéloïde réticulé projetables.

5.1. - Soit X un espace d'idéaux irréductibles d'un annéloïde réticulé A . Supposons que l'intersection des idéaux $x \in X$ soit réduite à zéro. A tout idéal irréductible $x \in X$ on associe l'idéal germinal $\gamma(x)$, qui est la somme des polaires principales $a^\perp$ avec $a \notin x$ (cf. section 1.5). Soient $x \in X$ et $a \in \gamma(x)$. D'après la proposition 1.5.3, l'ensemble des $y \in X$ tels que $a \in \gamma(y)$ est un voisinage de x . Il s'ensuit que l'ensemble des x tels que $a \in \gamma(x)$ est ouvert. Par conséquent, nous pouvons appliquer la construction canonique 2.10 et construire un faisceau $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ d'annéloïdes réticulés sur X ; la fibre E_x de $\mathcal{F}$ est justement $A/\gamma(x)$. Comme dans 2.10, on a un homomorphisme $a \mapsto \hat{a}$ de A dans l'annéloïde réticulé $\Gamma(\mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$. Cet homomorphisme est injectif, puisque $\bigcap_{x \in X} \gamma(x) \subseteq \bigcap_{x \in X} x = \{0\}$.

On peut choisir pour X l'espace πA de tous les idéaux irréductibles minimaux de A . On désigne par $\mathcal{F}^\pi(A) = \langle E^\pi, \eta^\pi, \pi A \rangle$ le

faisceau correspondant. On peut aussi considérer l'espace ξA de tous les idéaux irréductibles de A et le faisceau $\mathcal{F}^{\xi}(A) = \langle E^{\xi}, \eta^{\xi}, \xi A \rangle$ correspondant. On a :

PROPOSITION 5.2. - Tout annéloïde réticulé A peut être représenté comme un annéloïde réticulé de sections du faisceau $\mathcal{F}^{\pi}(A)$ (respectivement $\mathcal{F}^{\xi}(A)$) d'annéloïdes réticulés sur l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A (respectivement sur l'espace ξA des idéaux irréductibles de A).

Supposons maintenant que A est un annéloïde réticulé, dont le treillis des idéaux est arithmétique, c'est à dire que l'intersection de deux idéaux principaux quelconques de A est encore un idéal principal. D'après le Corollaire 1 de la proposition I.5.7, on a $\gamma(x) = x$ pour tout idéal irréductible minimal x . Par conséquent, les fibres du faisceau $\mathcal{F}^{\pi}(A)$ sont les annéloïdes réticulés irréductibles A/x , $x \in \pi A$. D'après le corollaire 4 du théorème I.4.4, l'espace topologique πA des idéaux irréductibles minimaux de A est séparé et il admet une base d'ouverts fermés; plus précisément, pour tout élément a de A , l'ensemble des idéaux premiers minimaux ne contenant pas a est ouvert et fermé dans πA . Par conséquent, le support de toute section $\hat{a}$, $a \in A$, de $\mathcal{F}^{\pi}(A)$ est ouvert et fermé. D'après 2.10e, le faisceau $\mathcal{F}^{\pi}(A)$ est donc séparé.

Nous appliquons ces raisonnements dans deux cas, premièrement dans le cas où A est un f-annéloïde. Si A est un f-annéloïde, le treillis des idéaux est en effet arithmétique d'après 1.14; de plus, A/x est totalement ordonné pour tout idéal irréductible x d'après 1.13. Nous avons donc :

PROPOSITION 5.3. - Tout f-annéloïde A peut être représenté par un f-annéloïde de sections dans un faisceau séparé $\mathcal{F}^\pi(A)$ d'annéloïdes totalement ordonnés sur l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A , qui possède une base d'ouverts fermés.

COROLLAIRE. - Tout groupe réticulé représentable (resp. tout f-anneau) peut être représenté par un groupe réticulé (resp. par un f-anneau) de sections dans un faisceau séparé de groupes (resp. d'anneaux) totalement ordonnés.

Le deuxième cas, où nous appliquons les raisonnements ci-dessus est le cas des annéloïdes réticulés projetables.

DEFINITION 5.4. - Un annéloïde réticulé A est dit projetable si le treillis des idéaux de A est projetable, c'est à dire si toute polaire principale $a^\perp$ de A est un facteur direct de A .

La proposition 1.10 fournit d'autres caractérisation des annéloïdes réticulés projetables. D'après la proposition I.6.3, nous avons :

PROPOSITION 5.5. - Soit A un annéloïde réticulé projetable. Alors le treillis des idéaux de A est arithmétique ; tout idéal germinal de A est irréductible ; pour tout élément a de A , l'ensemble $S_{\pi A}(a)$ des $x \in \pi A$ tels que $a \nmid x$, est compact et ouvert dans πA ; en particulier, πA est localement compact.

Cette proposition a les conséquences suivantes : Soit A un annéloïde réticulé projetable. Alors $\mathcal{F}^\pi(A)$ est un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés irréductibles sur un espace ayant une base d'ouverts compacts. Le support de toute section $\hat{a}$, $a \in A$, de

$\mathcal{F}^\pi(A)$ est compact. Montrons que réciproquement toute section à support compact de $\mathcal{F}^\pi(A)$ est de la forme $\hat{a}$, $a \in A$. Pour cela il suffit de vérifier la propriété (S-W) de 2.1of:

Soit $a \in A^+$ et soit U un voisinage d'un $x \in \pi A$. Alors U contient un voisinage ouvert et compact V de x , constitué des $y \in \pi A$ ne contenant pas un certain élément b de A . Puisque A est projetable, $A = b^\perp + b^{\perp\perp}$. Il existe donc $a_1 \in b^\perp$ et $a_2 \in b^{\perp\perp}$ tels que $a = a_1 + a_2$. On a donc

$$\hat{a}(x) = \hat{a}_1(x) + \hat{a}_2(x) = \hat{a}_2(x),$$

et le support de $\hat{a}_2$ est contenu dans V ; car pour tout $y \in \pi A \setminus V$, $b \in y = \gamma(y)$, donc $a_2 \in b^{\perp\perp} \subseteq y$ d'après I.5.2e.

Ainsi nous avons démontré la première partie du théorème suivant:

THEOREME 5.6. - Soit A un annéloïde réticulé projetable. Alors $\mathcal{F}^\pi(A) = \langle E^\pi, \eta^\pi, \pi A \rangle$ est un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés irréductibles sur l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A , qui possède une base d'ouverts compacts; et $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur l'annéloïde réticulé $\Gamma_k(\mathcal{F}^\pi(A))$ des sections à supports compacts de $\mathcal{F}^\pi(A)$.

Inversement, soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés irréductibles (non nuls) sur un espace X ayant une base d'ouverts compacts. Alors $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé projetable tel que le faisceau $\mathcal{F}^\pi(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ est isomorphe à $\mathcal{F}$.

Démontrons la deuxième partie du théorème. Soit X un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts; soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés irréductibles non nuls.

a) Soit $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})$. Puisque $\mathcal{F}$ est séparé, le support de σ

est ouvert et fermé. Par conséquent, $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est la somme directe de $\Gamma_k(\mathcal{F}|\text{supp } \sigma)$ et $\Gamma_k(\mathcal{F}|(X \setminus \text{supp } \sigma))$.

b) Pour tout $x \in X$, on peut définir un homomorphisme f_x de $\Gamma_k(\mathcal{F})$ dans la fibre E_x de $\mathcal{F}$ par $f_x(\sigma) = \sigma(x)$ quel que soit $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})$. Puisque X possède une base d'ouverts compacts, f_x est surjectif quel que soit $x \in X$.

c) Si τ appartient à la polaire $\sigma^\perp$ de σ dans $\Gamma_k(\mathcal{F})$, alors $\text{supp } \tau \cap \text{supp } \sigma = \emptyset$. En effet, si $\tau \in \sigma^\perp$, alors l'intersection des idéaux $\langle \tau \rangle$ et $\langle \sigma \rangle$ de $\Gamma_k(\mathcal{F})$, engendrés respectivement par τ et σ , est réduite à zéro. Puisque f_x est surjectif, on a $\langle f_x(\tau) \rangle = f_x(\langle \tau \rangle)$ et $\langle f_x(\sigma) \rangle = f_x(\langle \sigma \rangle)$. Donc $\langle f_x(\tau) \rangle \cap \langle f_x(\sigma) \rangle = 0$ quel que soit $x \in X$. Puisque E_x est irréductible, on a donc $\tau(x) = f_x(\tau) = 0$ ou $\sigma(x) = f_x(\sigma) = 0$ quel que soit $x \in X$.

d) D'après c), $\sigma^\perp = \Gamma_k(\mathcal{F}|(X \setminus \text{supp } \sigma))$. Puisque les fibres E_x sont toutes différentes de 0, il existe pour tout $x \in X \setminus \text{supp } \sigma$ une section $\tau \in \Gamma_k(\mathcal{F}|(X \setminus \text{supp } \sigma))$ telle que $\tau(x) \neq 0$. Par conséquent, $\sigma^{\perp\perp} = \Gamma_k(\mathcal{F}|\text{supp } \sigma)$. On a donc $\Gamma_k(\mathcal{F}) = \sigma^\perp + \sigma^{\perp\perp}$ d'après a). Ainsi nous avons démontré que $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est projectable.

e) Pour tout $x \in X$, soit $i(x)$ le noyau de $f_x: \Gamma_k(\mathcal{F}) \longrightarrow E_x$. Puisque f_x est surjectif et E_x irréductible, l'idéal $i(x)$ est irréductible. D'après c), $i(x)$ ne contient à la fois σ et $\sigma^\perp$ quel que soit $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})$. Par conséquent, $i(x)$ est un idéal irréductible minimal (Corollaire 2 du théorème I.4.4).

f) L'application $x \longmapsto i(x)$ de X dans $\pi \Gamma_k(\mathcal{F})$ est injective; car si x et y sont deux éléments distincts de X , il existe $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})$ tel que $\sigma(x) = 0_x$ et $\sigma(y) \neq 0_y$; donc $\sigma \in i(x)$, mais $\sigma \notin i(y)$. Pour montrer que cette application est surjective, prenons un idéal irréductible minimal quelconque i de $\Gamma_k(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{P}$

la famille des supports des sections $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F}) \setminus i$. Alors $\mathcal{C}$ est une base de filtre formée d'ensembles compacts de X . Il y a donc un élément x de X appartenant au support de toute section $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F}) \setminus i$. Si τ est une section appartenant à i , il existe $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F}) \setminus i$ tel que $\tau \in \sigma^\perp$, puisque $i = \gamma(i)$. D'après c), $\text{supp } \tau \cap \text{supp } \sigma = \emptyset$; donc $\tau(x) = 0_x$. Par conséquent, $i \subseteq i(x)$. On en déduit que $i = i(x)$, puisque i et $i(x)$ sont des idéaux irréductibles minimaux.

g) L'application $x \mapsto i(x)$ de X dans $\pi \Gamma_k(\mathcal{F})$ est donc bijective. Elle est un homéomorphisme; car $\sigma \notin i(x)$ est équivalent à $x \notin \text{supp } \sigma$; les supports des sections $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})$ forment une base de la topologie de X et les ensembles $S_\pi(\sigma) = \{i(x); \sigma \notin i(x)\}$ forment une base de la topologie de $\pi \Gamma_k(\mathcal{F})$.

h) Puisque $\Gamma_k(\mathcal{F})/i(x)$ est isomorphe à E_x , on vérifie facilement que les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\wedge(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ sont isomorphes.

Le théorème entraîne immédiatement:

COROLLAIRE. - Un f-annéloïde (resp. un groupe réticulé représentable, un f-anneau) est projetable si, et seulement si, il peut être représenté par l'annéloïde de toutes les sections à supports compacts d'un faisceau séparé d'annéloïdes (resp. de groupes, d'anneaux) totalement ordonnés sur un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts.

6. Représentation sur l'espace des idéaux maximaux.

Soit A un annéloïde réticulé. On désigne par μA l'espace des idéaux maximaux de A . Supposons que A est μ -semi-simple, c'est à dire que l'intersection des idéaux maximaux de A est $\{0\}$. Désignons par $\mathcal{F}^\mu(A) = \langle E^\mu, \eta^\mu, \mu A \rangle$ le faisceau construit sur μA suivant 5.1. L'annéloïde réticulé A est isomorphe à un annéloïde réticulé de sections de $\mathcal{F}^\mu(A)$.

Rappelons qu'un élément u de A est appelé unité formelle si $u \geq 0$ et si u n'est contenu dans aucun idéal propre de A . Nous dirons que A est quasi-local si A possède une unité formelle et un seul idéal maximal. L'espace d'Isbell d'un annéloïde réticulé quasi-local est réduit à un seul point.

THEOREME 6.1. - A./ Soit A un annéloïde réticulé μ -semi-simple ayant une unité formelle u . Supposons que l'espace μA des idéaux maximaux de A soit séparé. Alors μA et l'espace d'Isbell BA sont homéomorphes. Pour tout idéal maximal x de A , l'idéal germinal $\gamma(x)$ est x -primaire minimum. Les faisceaux $\mathcal{F}^B(A)$ et $\mathcal{F}^\mu(A)$ sont identiques. A est isomorphe à l'annéloïde réticulé de toutes les sections de $\mathcal{F}^\mu(A)$. De plus, $\mathcal{F}^\mu(A)$ possède les propriétés suivantes :

(a) Toute fibre $E_x^\mu = A/\gamma(x)$ de $\mathcal{F}^\mu(A)$ est quasi-local.

(b) Désignons par $m(x)$ l'unique idéal maximal de $A/\gamma(x)$. Le sous-espace $M = \bigcup_{x \in \mu A} m(x)$ de E^μ est fermé et n'a pas de point intérieur sauf les points 0_x , $x \in \mu A$.

(c) $\mathcal{F}^\mu(A)$ possède la propriété d'extension.

(d) Si x et y sont deux idéaux maximaux distincts de A , il existe une section $\sigma \in \mathcal{F}^\mu(A)$ telle que $\sigma(x) \notin m(x)$ et $\sigma(y) = 0_y$.

(e) Le support de toute section de $\mathcal{F}^\mu(A)$ possède des points intérieurs.

B. Soit inversement $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés sur un espace compact X vérifiant (a), (b), (c), (d), (e).

Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé μ -semi-simple ayant une unité formelle, et le faisceau $\mathcal{F}^\mu(\Gamma(\mathcal{F}))$ est isomorphe à $\mathcal{F}$.

Démonstration. A. D'après II.4.4 et II.4.6, μA et BA sont homéomorphes et les faisceaux $\mathcal{F}^\mu(A)$ et $\mathcal{F}^B(A)$ coïncident. D'après le théorème 3.5, A est donc isomorphe à $\mathcal{F}^\mu(A)$. D'après la proposition I.5.6, $\gamma(x)$ est le plus petit idéal x -primaire de A quel que soit $x \in \mu A$. Il s'ensuit que la fibre $E_x^\mu = A/\gamma(x)$ possède un seul idéal maximal $m(x)$. Puisque A admet une unité formelle, il en est de même de $A/\gamma(x)$. Par conséquent, $A/\gamma(x)$ est quasi-local. La propriété (c) découle de la construction 2.10d. Pour démontrer (d) prenons deux idéaux maximaux distincts x et y de A . Puisque μA est séparé, il existe des voisinages disjoints U et V de x et y respectivement. On peut supposer que U est l'ensemble des $z \in \mu A$ tels que $a \notin z$ pour un certain $a \in A$. On a $\hat{a}(x) \notin m(x)$ et, puisque l'ensemble des $z \in \mu A$ tels que $a \in z$ est un voisinage de y , on a $a \in \gamma(y)$ d'après I.5.3; donc $\hat{a}(y) = 0_y$. Puisque toute section de $\mathcal{F}^\mu(A)$ est de la forme $\hat{a}$, $a \in A$, et puisque l'ensemble des idéaux maximaux ne contenant pas a est ouvert, on a aussi (e).

Démontrons (b): $M = \bigcup_{x \in \mu A} m(x)$ est fermé; car si $t \in E^\mu \setminus M$, il existe $a \in A$ tel que $t = \hat{a}(\eta^\mu(t))$; l'ensemble U des $x \in \mu A$ tels que $a \notin x$, est un voisinage de $\eta(t)$; donc $\hat{a}(U)$ est un voisinage de t ne rencontrant pas M . Soit s un point intérieur de M . Il existe un voisinage U de $x = \eta(s)$ et un élément a de A tels que $\hat{a}(U) \subseteq M$. Puisque $\mathcal{F}^B(A)$ vérifie la propriété (S-W) de 2.1of, il existe $b \in A$ tel que $\hat{b}(x) \geq |\hat{a}|(x)$ et $\text{supp } \hat{b} \subseteq U$. Si l'on pose $c = |b| \wedge |a|$, on a $\hat{c}(x) = |\hat{a}|(x)$ et $\text{supp } \hat{c} \subseteq U$. Puisque $0 \leq c \leq |a|$, on a $\hat{c}(U) \subseteq M$. On en déduit que $c \in x$ pour tout $x \in \mu A$; donc $c = 0$. Par suite, $s = \hat{a}(x) = 0_x$. Donc tout point intérieur de M est de la forme 0_x , $x \in \mu A$.

B. Supposons que $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ soit un faisceau d'annéloïdes réticulés sur un espace compact X , vérifiant les propriétés (a), (b), (c), (d), (e). D'après (c), l'homomorphisme canonique $f_x: \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow E_x$ est surjectif pour tout $x \in X$. Donc $i(x) = f_x^{-1}(m(x))$ est un idéal maximal de $\Gamma(\mathcal{F})$. Nous avons donc une application $x \mapsto i(x)$ de X dans $\mu \Gamma(\mathcal{F})$. Cette application est injective en raison de (d). D'après (b) et (e), $\bigcap_{x \in X} i(x) = \{0\}$. Donc $\Gamma(\mathcal{F})$ est μ -semi-simple.

Soit σ une section positive de $\mathcal{F}$ telle que $\sigma(x) \notin m(x)$ pour tout $x \in X$. Montrons que σ est une unité formelle de $\Gamma(\mathcal{F})$. En effet, soit τ une section positive de $\mathcal{F}$. Soit $x \in X$. En vertu de (a), l'idéal de E_x engendré par $\sigma(x)$ est E_x tout entier. Il existe donc τ_x dans l'idéal $\langle \sigma \rangle$ de $\Gamma(\mathcal{F})$ engendré par σ tel que $\tau_x(x) \geq \tau(x)$. Il y a un voisinage U_x de x tel que $\tau_x(y) \geq \tau(y)$ pour tout $y \in U_x$. Puisque X est compact, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans X tels que $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$. On en

déduit que

$$\tau \leq \tau_{x_1} \vee \tau_{x_2} \vee \dots \vee \tau_{x_n} \in \langle \sigma \rangle .$$

Par conséquent, $\tau \in \langle \sigma \rangle$ quel que soit $\tau \in \Gamma(\mathcal{F})$.

Le faisceau $\mathcal{F}$ possède une section σ qui est une unité formelle de $\Gamma(\mathcal{F})$: Pour le démontrer, montrons que $\mathcal{F}$ possède une section positive σ telle que $\sigma(x) \notin m(x)$ quel que soit $x \in X$. En effet, pour tout $x \in X$, on peut choisir une section positive σ_x telle que $\sigma_x(x) \notin m(x)$. D'après la propriété (b), il existe un voisinage V_x de x tel que $\sigma_x(y) \notin m(y)$ pour tout $y \in V_x$. Puisque X est compact, on peut choisir $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans X tels que $X = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Si l'on pose

$$\sigma = \sigma_{x_1} \vee \sigma_{x_2} \vee \dots \vee \sigma_{x_n} ,$$

on a bien $\sigma(x) \notin m(x)$ quel que soit $x \in X$.

Pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$, soit $r(\sigma)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\sigma(x) \in m(x)$. D'après (b), $r(\sigma)$ est une partie fermée de X ; et si σ n'est pas une unité formelle de $\Gamma(\mathcal{F})$, $r(\sigma)$ n'est pas vide. Si σ parcourt un idéal propre j de $\Gamma(\mathcal{F})$, les $r(\sigma)$ forment une base de filtre dans X . Puisque X est compact, il y a un $x \in X$ contenu dans $r(\sigma)$ pour tout $\sigma \in j$. Par conséquent, $j \subseteq i(x)$. On en déduit que tout idéal maximal de $\Gamma(\mathcal{F})$ est de la forme $i(x)$. L'application $x \mapsto i(x)$ de X dans $\mu\Gamma(\mathcal{F})$ est donc bijective. Elle est un homéomorphisme, car en vertu de (d), les ensembles de la forme $X \setminus r(\sigma)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$, forment une base de la topologie de X .

L'idéal germinale $\gamma(i(x))$ associé à un idéal maximal $i(x)$ est égal au noyau de $f_x : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow E_x$; en effet, d'après I.5.3, $\gamma(i(x))$ est l'ensemble des $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ telles que l'ensemble des $y \in X$ vérifiant $\sigma(y) \in m(y)$ est un voisinage de x . Par conséquent, les

fibres de $\mathcal{F}^\mu(\Gamma(\mathcal{F}))$ sont canoniquement isomorphes aux fibres de $\mathcal{F}$. Puisque les ensembles $\sigma(U)$, où U parcourt les ouverts de X et σ l'annéloïde réticulé $\Gamma(\mathcal{F})$, forment une base de la topologie de E , la construction de $\mathcal{F}^\mu(\Gamma(\mathcal{F}))$ montre que les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\mu(\Gamma(\mathcal{F}))$ sont isomorphes. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque 1. - Si l'espace X dans 6.1.B possède une base d'ouverts fermés, les conditions (c) et (d) sont automatiquement vérifiées.

Remarque 2. - Un groupe réticulé représentable A est μ -semi-simple et possède une unité formelle si, et seulement si, A est un groupe réticulé archimédien ayant un élément archimédien. (Rappelons qu'un élément u d'un groupe réticulé A est appelé élément archimédien si, pour tout $a \in A$, il existe un entier n tel que $a \leq nu$.) Ainsi le théorème 6.1 donne une caractérisation des groupes réticulés archimédiens ayant un élément archimédien par des faisceaux.

Pour les f -annéloïdes ayant une unité formelle, nous démontrerons un théorème de représentation analogue sans l'hypothèse de μ -simplicité. L'homéomorphie de μA et BA a été démontrée par Isbell [18] dans le cas d'un groupe réticulé commutatif. La même démonstration reste valable dans le cas plus général.

THEOREME 6.2. - A. Soit A un f -annéloïde ayant une unité formelle u . Alors $k: \mu A \longrightarrow BA$ est un homéomorphisme. Pour tout idéal maximal x de A , l'idéal germinale (x) est x -primaire minimum et $(x) = (k(x))$. Le faisceau $\beta(A) = \langle E^\beta, \eta^\beta, BA \rangle$ vérifie les propriétés (a), (c), (d) de 6.1 et la propriété (b') :

(b') $M = \bigcup_{x \in \beta A} m(x)$ est une partie fermée de E^B .

B. Soit inversement $\mathcal{F}$ un faisceau de f-annéloïdes sur un espace compact X vérifiant les propriétés (a), (b'), (c), (d). Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est un f-annéloïde ayant une unité formelle et les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^B(\Gamma(\mathcal{F}))$ sont isomorphes.

Démonstration. D'après I.3.3 et III.1.15, μA est un espace compact et, d'après II.4.2, $x \mapsto k(x)$ est une application continue surjective de μA sur βA . Pour que cette application soit un homéomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective.

Soient x et y deux idéaux maximaux distincts de A . Il existe un élément positif a appartenant à x tel que $a \equiv u \pmod{y}$. L'élément $b = u - a$ appartient à y et on a $b \equiv u \pmod{x}$. Pour tout nombre rationnel $\rho = \frac{n}{m} \in]0, 1]$, n et m étant des entiers non-négatifs premiers entre eux, soit $p_\rho = ((ma - nb)^+)^+$. Si $\rho = \frac{n}{m} < \frac{n'}{m'} = \rho'$, aucun idéal maximal z ne contient à la fois $(ma - nb)^+$ et $(m'a - n'b)^-$; car s'il en était ainsi, on aurait

$$ma \leq nb \pmod{z} \quad \text{et} \quad n'b \leq m'a \pmod{z},$$

donc

$$n'ma \leq n'nb \leq nm'a \pmod{z};$$

or, $nm' < n'm$, donc $a \in z$ et $b \in z$, ce qui est impossible

puisque $u = b + a \notin z$. Par conséquent, $u' = (ma - nb)^+ + (m'a - n'b)^-$ est une unité formelle de A contenue dans $p_\rho + p_{\rho'}^+$. Ainsi p_ρ est un r -voisinage de $p_{\rho'}$ chaque fois que $\rho < \rho'$. Pour tout $\rho = \frac{n}{m}$, $(ma - nb)^+$ appartient à p_ρ^+ et est congru à mu modulo y ; donc $p_\rho \subseteq y$. Par conséquent $p_1 \in k(y)$. Mais $p_1 \notin x$, car p_1 contient $(a - b)^-$ qui est congru à u modulo x ; donc $p_1 \notin k(x)$. On a donc démontré que $k(x) \neq k(y)$.

Ce raisonnement montre au même temps que l'idéal absolument germinal $\gamma^k(x)$ est x -primaire. L'idéal germinal $\gamma(x)$ est contenu dans tout idéal x -primaire, et $\gamma^k(x) \subseteq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma^k(x) = \gamma(x)$ et $\gamma(x)$ est le plus petit idéal x -primaire de A .

Comme dans le théorème 6.1, on démontre que $\mathcal{F}^B(A)$ possède les propriétés (a),(b'),(c),(d). La partie B du théorème se démontre comme dans le théorème 6.1.

A l'aide du théorème 3.2, on obtient :

COROLLAIRE. - Si un f-annéloïde A possède une unité formelle, il y a une correspondance bijective entre les facteurs directs de A et les parties à la fois ouvertes et fermées de μA . Si de plus μA est fini, A est la somme directe d'un nombre fini de f-annéloïdes quasi-locaux.

7. Idéaux dominés d'un f-anneau.

Dans cette section, A désigne toujours un f-anneau. Isbell [18] a introduit la notion d'élément dominé :

DEFINITION 7.1. - Un élément d d'un f-anneau A est appelé élément dominant si d est une unité formelle de A telle que $d^2 \geq d$. Un idéal j de A est dit dominé par d si d est un élément dominant de A modulo j . On dit que A possède localement des éléments dominants si l'intersection des idéaux dominés de A est réduite à zéro.

Si i est un idéal d'un f-anneau A et si i contient un idéal j de A , dominé par d , alors i est aussi dominé par d sauf si $i = A$.

Si d domine un idéal j de A , toute valeur de d contenant j est un idéal maximal de A , dominé par d . En particulier, tout idéal dominé est contenu dans un idéal maximal dominé. Nous désignerons par $\mathcal{d}A$ l'espace des idéaux maximaux dominés de A .

Nous dirons qu'un f-anneau A est simple si $A \neq 0$ et si A ne contient aucun idéal propre non nul. (On remarque que nous n'excluons pas qu'un f-anneau simple soit un zéro anneau.) Un f-anneau est sous-directement irréductible s'il contient un plus petit idéal non nul ; ce plus petit idéal non nul sera appelé coeur de A .

THEOREME 7.2 (D.G. Johnson [20], p. 190). - Un f-anneau sous-directement irréductible est totalement ordonné et ou bien simple ou bien à coeur nilpotent.

COROLLAIRE 1. - Si un anneau totalement ordonné A contient un élément d vérifiant $d^2 \geq d > 0$, alors d est un élément dominant de A .

En effet, d possède une valeur x ; A/x est sous-directement irréductible et le coeur de A n'est pas nilpotent. Donc A/x est simple et x est un idéal maximal de A .

Rappelons qu'un élément u d'un f -anneau A est appelé unité faible si $u \wedge a > 0$ pour tout élément strictement positif a de A . Une unité faible est aussi caractérisée par la propriété d'être un élément positif de A n'appartenant à aucun idéal irréductible minimal de A .

COROLLAIRE 2. - Si un f -anneau A contient une unité faible d telle que $d^2 \geq d$, alors d est un élément dominant de A .

En effet, d n'appartient à aucun idéal irréductible minimal de A . D'après le corollaire 1, d domine donc tout idéal irréductible minimal. Puisque tout idéal irréductible de A contient un idéal irréductible minimal, on en déduit que d n'est contenu dans aucun idéal irréductible propre et par suite dans aucun idéal propre de A .

Suivant Henriksen et Isbell [17], nous dirons qu'un f -anneau A est infinitésimal si $a^2 < |a|$ quel que soit $a \neq 0$. Nous allons montrer qu'un f -anneau est infinitésimal si, et seulement si, $\mathcal{I}A \neq \emptyset$:

PROPOSITION 7.3. - Un f -anneau A est infinitésimal si, et seulement si, il n'admet aucun idéal dominé.

Démonstration. Si A est infinitésimal, toute image homomorphe de A est infinitésimale. Donc aucune image homomorphe de A ne possède un élément dominant et, par suite, A n'admet pas d'idéal dominé. Inversement, un f -anneau A sans idéal dominé est un produit sous-direct d'anneaux totalement ordonnés sans élément dominant. D'après le corollaire 1 de 7.2, tout f -anneau totalement ordonné sans élément dominant est infinitésimal. Or, un produit sous-direct de f -anneaux infinitésimaux est infinitésimal; donc A est infinitésimal.

LEMME 7.4 (Isbell [18]). - Soit x un idéal d'un f -anneau A , dominé par un élément $d > 0$. Soit $p = ((4d^2 - d)^+)^{\perp}$ et $q = ((2d^2 - d)^+)^{\perp}$. Alors q est un c - r -voisinage de p , contenu dans x , et p est dominé par $4d$.

Démonstration. Puisque $(4d^2 - d)^-$ appartient à p , on a

$$0 < d \leq 4d^2 \pmod{p},$$
donc

$$0 < 4d \leq (4d)^2 \pmod{p}.$$
Puisque $4d^2 \geq (4d^2 - d)^+$, l'élément $4d^2$ est une unité faible modulo p ; donc $4d$ est aussi une unité faible modulo p . D'après le corollaire 2 de 7.2, l'idéal p est donc dominé par $4d$. Puisque $(2d^2 - d)^+$ majore d modulo x , on a $q \subseteq x$.

Montrons que q est un c - r -voisinage de p : Pour tout nombre rationnel $\rho = \frac{n}{m} \in [\frac{1}{2}, 1]$, où n et m sont des entiers positifs, soit

$$p_{\rho} = ((2md^2 - nd)^+)^{\perp}.$$

Alors $p_1 = q$ et $p_{1/2} = p$. Soit $\rho = \frac{n}{m} < \frac{n'}{m'} = \rho'$. Alors

$$2n'md^2 - nn'd \geq 2nm'd^2 - nn'd,$$

donc

$$p_{\rho} = ((2n'md^2 - n'nd)^+)^{\perp} \subseteq ((2nm'd^2 - nn'd)^+)^{\perp} = p_{\rho'}.$$

Par conséquent, $4d$ domine $p_{\rho'}$, quel que soit le nombre rationnel $\rho' \in [\frac{1}{2}, 1]$. Il s'ensuit que d est une unité formelle modulo $p_{\rho'}$.

Puisque $(2m'd^2 - n'd)^+$ appartient à $p_{\rho'}$, on a :

$$2m'd^2 \geq n'd \pmod{p_{\rho'}},$$

donc

$$2mm'd^2 \geq mn'd \pmod{p_{\rho'}}.$$

L'élément $a = (2m'md^2 - m'nd)^+$ appartient à $p_{\rho'}^+$. On a :

$$a \geq mn'd - m'nd \pmod{p_{\rho'}}.$$

Puisque $mn' > m'n$, on a donc $a \geq d \pmod{p_{\rho'}}$. Puisque d est une unité formelle modulo $p_{\rho'}$, on a donc $A = p_{\rho'}^+ + p_{\rho'}$.

Le théorème suivant est dû à Isbell [18]. On remarquera cependant que le théorème d'Isbell contient une lacune due à la définition inadéquate de la notion d'idéal x -primaire (cf. I.5.4).

THEOREME 7.5 (Isbell [18]). - Soit A un f -anneau. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace $\mathcal{I}A$ des idéaux maximaux dominés de A sur un sous-espace ouvert de l'espace d'Isbell BA . Pour tout $x \in \mathcal{I}A$, l'idéal germinal $\gamma(x)$ est dominé et le plus petit idéal x -primaire de A ; l'idéal absolument germinal $\gamma k(x)$ est égal à $\gamma(x)$.

Démonstration. Montrons que $x \mapsto k(x)$ est injective sur $\mathcal{I}A$. Soient x et y deux idéaux maximaux dominés distincts. Il existe des éléments positifs d' et c' dans A dominant respectivement x et y tels que $d' \in y$ et $c' \in x$. Les éléments

$$d = d' - (d' \wedge c') \quad \text{et} \quad c = c' - (d' \wedge c')$$

sont orthogonaux; ils dominent respectivement x et y . Soient p et q comme dans le lemme 7.4. Alors q est un c - r -voisinage de p contenu dans x , et p est dominé par $4d$. Puisque c est ortho-

gonal à d , c appartient à p ; donc $p \in k(x)$, mais $p \notin k(y)$. Par conséquent $k(x) \neq k(y)$.

La polaire $p \in k(x)$ étant dominé par $4d$, l'idéal absolument germinale $\gamma k(x)$ est aussi dominé par $4d$. Tout idéal contenant $\gamma k(x)$ est contenu dans un idéal maximal dominé y . Puisque $p \notin y$ pour tout $y \neq x$, $\gamma k(x)$ est x -primaire. Or, $\gamma k(x) \subseteq \gamma(x)$ et $\gamma(x)$ est contenu dans tout idéal x -primaire; donc $\gamma(x) = \gamma k(x)$ et $\gamma(x)$ est le plus petit idéal x -primaire de A .

L'application $x \mapsto k(x)$ de A dans BA est continue d'après II.4.4. Montrons qu'elle est ouverte: Soit $x \in \mathcal{A}$. Tout voisinage de x dans $\mathcal{A}$ contient un voisinage U constitué par les $y \in \mathcal{A}$ ne contenant pas un certain élément d dominant x . Soit p comme dans le lemme 7.4. Les c - r -idéaux maximaux φ tels que $p \in \varphi$ forment un voisinage V de $k(x)$ dans BA . Puisque p est dominé par $4d$, il existe pour tout $\varphi \in V$ un idéal maximal y dominé par $4d$ tel que $k(y) = \varphi$. Puisque tout $y \in \mathcal{A}$ dominé par $4d$ appartient à U , nous avons $V \subseteq k(U)$. Ainsi $x \mapsto k(x)$ est une application continue ouverte injective de $\mathcal{A}$ dans BA , c'est à dire que $\mathcal{A}$ est homéomorphe à un sous-espace ouverte de BA .

A partir de maintenant nous identifions $\mathcal{A}$ avec son image dans BA . Considérons le faisceau $\mathcal{F}^B(A)$ de 3.5. Identifions les éléments a de A avec les sections correspondantes $\hat{a}$ de $\mathcal{F}^B(A)$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$, la fibre de $\mathcal{F}^B(A)$ sur x est le f -anneau quotient $E_x^B = A/\gamma(x)$ qui est quasi-local et possède un élément dominant d'après le théorème 7.4. Pour tout $\varphi \in BA \setminus \mathcal{A}$, la fibre $E_\varphi^B = A/\gamma(\varphi)$ est un f -anneau infinitésimal. En effet, si $A/\gamma(\varphi)$ n'était pas infinitésimal, $\gamma(\varphi)$ serait contenu dans un idéal maximal dominé x

d'après la proposition 7.3, et on aurait $\mathcal{C} = k(x)$. Ainsi nous pouvons préciser le théorème 3.5 :

COROLLAIRE. - Tout f-anneau A peut être représenté comme le f-anneau de toutes les sections d'un faisceau de base BA , dont les fibres sont infinitésimaux ou des f-anneaux quasi-locaux ayant localement des éléments dominants.

La proposition suivante généralise le théorème 5.5 de Henriksen et Isbell [17] :

PROPOSITION 7.6. - Tout f-anneau A possède des idéaux j_1, j_2 tels que $j_1 \cap j_2 = 0$ et tels que $A_1 = A/j_1$ soit infinitésimal et que $A_2 = A/j_2$ admette localement des éléments dominants. j_2 est unique : c'est l'intersection des idéaux dominés de A .

Démonstration. Soit $j_1 = \{a ; \text{supp } a \subseteq \mathcal{I}A\}$. Alors $A_1 = A/j_1$ est infinitésimal ; car s'il n'était pas ainsi, j_1 serait contenu dans un idéal maximal dominé x ; or, puisque $\mathcal{I}A$ est ouvert et puisque $\mathcal{F}^B(A)$ vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß d'après 3.4, il existe a tel que $a \in x$ et $\text{supp } a \subseteq \mathcal{I}A$, c'est à dire que $a \in j_1$ et $a \notin x$, ce qui est impossible. Définissons $j_2 = \{a ; \text{supp } a \subseteq BA \setminus \mathcal{I}A\}$. Alors j_2 est l'intersection des idéaux dominés $\gamma(x)$, $x \in \mathcal{I}A$; donc $A_2 = A/j_2$ possède localement des éléments dominants. On a évidemment $j_1 \cap j_2 = \{0\}$.

Avant de démontrer la deuxième partie de la proposition 7.6, démontrons un résultat généralisant la deuxième partie du théorème 5.9 de [17] :

PROPOSITION 7.7. - Dans un f-anneau A , l'intersection des idéaux dominés de A est égale à l'intersection des idéaux germinaux associés aux idéaux maximaux dominés de A .

Démonstration. Puisque $\gamma(x)$ est dominé pour tout $x \in \mathcal{A}$, il suffit de montrer que tout idéal dominé j contient j_2 . Soit donc j un idéal dominé de A . Pour tout $\varphi \in BA$, soit f_φ l'homomorphisme canonique de $A = \Gamma \mathcal{T}^B(A)$ dans E_φ^B , qui est surjectif. On a $f_\varphi(j) = E_\varphi^B$ ou $f_\varphi(j)$ est un idéal dominé de E_φ^B . Donc $f_\varphi(j) = E_\varphi^B$ pour tout $\varphi \in BA \setminus \mathcal{A}$. Utilisant la compacité de $BA \setminus \mathcal{A}$, on en déduit que $j_2 \subseteq j$.

COROLLAIRE. - Un f-anneau A possède localement des éléments dominants si, et seulement si, l'intersection des idéaux germinaux associés aux idéaux maximaux dominés est réduite à zéro.

Démontrons maintenant la deuxième partie de 7.6 : Soient i_1 et i_2 deux idéaux de A , d'intersection zéro, tels que A/i_1 soit infinitésimal et A/i_2 ait localement des éléments dominants. D'après la proposition 7.7, $j_2 \subseteq i_2$. De même $j_1 \subseteq i_1$. Si $j_2 \neq i_2$, il y a un élément a dans i_2 , dont le support rencontre $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{T}^B(A)$ vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß, on peut supposer que le support de a est contenu dans $\mathcal{A}$. Donc $i_2 \cap j_1 \neq 0$ et par suite $i_2 \cap i_1 \neq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Rappelons que d'après 3.2, $p \mapsto Z_B(p^\perp)$ est une bijection entre les facteurs directs p de A et les ouverts fermés de l'espace d'Isbell BA . La bijection réciproque peut être donnée de la manière suivante : Si U est une partie ouverte et fermée de BA , l'ensemble $\Gamma^U = \Gamma(\mathcal{T}^B(A)|U)$ des sections de $\mathcal{T}^B(A)$ à supports dans U est un facteur direct de A .

PROPOSITION 7.8. - Soit A un f-anneau. Alors $U \mapsto \Gamma^U$ définit une bijection entre les parties ouvertes compactes de $\mathcal{A}$ et les facteurs directs de A, ayant un élément dominant.

Démonstration. Soit p un facteur direct de A , ayant un élément dominant d . L'ensemble $U = Z_B(p^+)$ est une partie ouverte compacte de BA . Soit $\varphi \in U$; alors $p \nsubseteq \varphi$, donc $d \notin \gamma(\varphi)$. Puisque $d^2 \geq d$, la fibre $E_\varphi^B = A/\gamma(\varphi)$ n'est pas infinitésimal; donc $\varphi \in \mathcal{A}$, c'est à dire que $U \subseteq \mathcal{A}$.

Soit inversement U une partie compacte ouverte de $\mathcal{A}$. Montrons que l'ensemble Γ^U des sections de $\mathcal{F}^B(A)$, à supports dans U , possède un élément dominant: Pour tout $x \in U$, Γ^U contient un élément c_x dominant l'idéal germinale $\gamma(x)$. En remplaçant c_x par $2c_x$, si nécessaire, on peut supposer que $c_x^2 > c_x \pmod{\gamma(x)}$. L'ensemble des $y \in U$ tels que

$$c_x^2 > c_x > 0 \pmod{y},$$

est un voisinage ouvert V_x de x . Puisque U est compact, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans U tels que $U = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}$.

Soit $(W_k)_{k=1,2,\dots,n}$ un recouvrement ouvert de U tel que l'adhérence de W_k est contenu dans V_{x_k} quel que soit $k = 1, \dots, n$. Puisque $\mathcal{F}^B(A)$ vérifie la propriété faible de Stone-Weierstraß, il existe des éléments positifs d_k dans Γ^U tels que $\text{supp } d_k \subseteq V_{x_k}$, $d_k \leq c_{x_k}$ et $d_k \equiv c_{x_k} \pmod{y}$ pour tout $y \in W_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). L'élément $d = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_n$ est un élément dominant de Γ^U .

COROLLAIRE 1. - $\mathcal{A}$ est compact si, et seulement si, A est la somme directe d'un f-anneau infinitésimal et d'un f-anneau ayant un élément dominant.

Ce corollaire est une conséquence des propositions 7.7 et 7.8.

COROLLAIRE 2. - Si $\mathcal{A}$ est fini, A est la somme directe d'un f-anneau infinitésimal et d'un nombre fini de f-anneaux quasi-locaux ayant un élément dominant.

Un idéal j d'un f-anneau A est dit idempotent, si $j = \langle j^2 \rangle$ c'est à dire si l'idéal engendré par les éléments de la forme ab , a et b appartenant à j , est égal à j .

PROPOSITION 7.9. - Tout idéal principal idempotent d'un f-anneau A est un facteur direct de A , ayant un élément dominant.

Démonstration. Soit j un idéal principal idempotent de A , engendré par a . Soit x une valeur de a . Le f-anneau quotient A/x est sous-directement irréductible et le coeur de A/x est idempotent. D'après le théorème 7.2, A/x est simple. Puisque A/x n'est pas infinitésimal, il possède un élément dominant d'après 7.3. Par conséquent, l'ensemble U des valeurs de a est contenu dans $\mathcal{A}$. D'après I.3.2, U est compact. D'après 7.8, Γ^U est un facteur direct de A , ayant un élément dominant. Puisque $a \in x$ pour tout $x \in U$, l'idéal engendré par a est égal à Γ^U .

COROLLAIRE 1. - Tout idéal principal idempotent de A est engendré par un élément d vérifiant $d^2 \leq d \leq 0$; et tout idéal principal de A engendré par un tel élément d est un facteur direct de A .

En effet, si d est un élément dominant d'un facteur direct j de A , j est égal à l'idéal principal engendré par d . D'autre part, si un élément d de A vérifie $d^2 \leq d \leq 0$, l'idéal principal engendré par d est idempotent.

COROLLAIRE 2. - Les facteurs directs d'un f-anneau ayant un élément dominant sont exactement les idéaux principaux idempotents.

En effet, si A admet un élément dominant, il en est de même de tout facteur direct de A .

COROLLAIRE 3. - Tout idéal principal de A , engendré par un élément idempotent, est un facteur direct de A .

Remarquons que, dans un f-anneau unitaire A , les facteurs directs correspondent bijectivement aux idempotents de A . En effet, Henriksen et Isbell ont montré ([17], lemme 2.1) que les éléments idempotents d'un f-anneau unitaire sont centraux. Par conséquent, $e \mapsto eA$ est une bijection entre les idempotents de A et les facteurs directs de l'anneau abstrait A . Puisque eA est le noyau de l'endomorphisme $a \mapsto (1-e)a$ de A , eA est aussi un idéal du f-anneau A . Le corollaire 2 est une généralisation de cette remarque.

8. f-anneaux quasi-archimédiens et δ -semi-simples.

Dans cette section, A désigne toujours un f-anneau et on note $M = A^+ \cup \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

Rappelons qu'un groupe réticulé A est dit archimédien si, quels que soient $a, b \in A^+$, $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ entraîne $a = 0$. Ainsi un groupe réticulé commutatif est archimédien si, et seulement si, aucun idéal non nul de A n'admet de majorant.

DEFINITION 8.1. - Un f-anneau A est dit quasi-archimédien si aucun idéal non nul de A n'admet de majorant.

Tout f-anneau archimédien est quasi-archimédien. Inversement, tout zéro f-anneau quasi-archimédien est archimédien.

LEMME 8.2. - A est quasi-archimédien si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée: Quels que soient $a, b \in A^+$, $ma \leq b$ pour tout $m, m' \in M$ entraîne $a = 0$.

Démonstration. Soit $a \in A^+$. L'idéal de A engendré par a , est l'ensemble des c dans A tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $s \in A^+$ tels que

$$|c| \leq na + sa + as + sas.$$

Les éléments na, sa, as, sas sont tous de la forme ma' avec $m, m' \in M$. Donc si $\langle a \rangle$ est majoré par b , tous les éléments de la forme ma' sont aussi majorés par b . Inversement, si tous les éléments de la forme ma' sont majorés par b' , alors $\langle a \rangle$ est majoré par $b = 4b'$.

LEMME 8.3. - Si p est une polaire d'un f-anneau quasi-archimédien A , le f-anneau quotient A/p est aussi quasi-archimédien.

Démonstration. Soient a et b des éléments de A^+ tels que

$$ma'm' \leq b \pmod{p} \text{ quels que soient } m, m' \in M.$$

Supposons que $a \notin p$. Alors il existe $a' \in p^+$ tel que $0 < a' \leq a$ et on a

$$ma'm' \leq b \pmod{p} \text{ quels que soient } m, m' \in M.$$

Pour tout couple $m, m' \in M$, il existe $0 \leq c \in p$ tel que $ma'm' \leq b + c$.

D'après [15], p. 69, il existe $a_1, a_2 \in A^+$ tels que $a_1 + a_2 = ma'm'$

et $a_1 \leq b$, $a_2 \leq c$. Puisque $ma'm' \in p^+$, on a nécessairement $a_2 = 0$.

Donc $ma'm' \leq b$ quels que soient $m, m' \in M$, ce qui est impossible puisque A est supposé quasi-archimédien et $a' > 0$.

DEFINITION 8.4. - Un f-anneau A est appelé $\mathcal{J}$ -semi-simple si l'intersection des idéaux maximaux dominés de A est réduite à zéro.

Henriksen et Isbell [17] ont appelé S-semi-simple les f-anneaux que nous appelons $\mathcal{J}$ -semi-simple.

LEMME 8.5. - Tout f-anneau $\mathcal{J}$ -semi-simple A possède la propriété suivante: Quels que soient $a, b \in A^+$,

$$sa \leq b \text{ pour tout } s \in A^+ \text{ entraîne } a = 0$$

$$\text{et } as \leq b \text{ pour tout } s \in A^+ \text{ entraîne } a = 0;$$

en particulier A est quasi-archimédien.

Démonstration. Soit $0 < a \in A$. Il existe un idéal maximal dominé x de A , ne contenant pas a . D'après un théorème de D.G. Johnson

([20], p. 213), A/x ne contient aucun idéal propre non nul ni à

gauche ni à droite. De plus, A/x n'admet d'annulateur non nul ni à

gauche ni à droite. Pour tout $b \in A^+$, il existe donc $s \in A^+$ tel que

$$sa \not\leq b \text{ et } as \not\leq b.$$

THEOREME 8.6. - Un f-anneau A est quasi-archimédien si, et seulement si, A est un produit sous-direct d'un zéro f-anneau archimédien et d'un f-anneau $\mathcal{O}$ -semisimple.

Démonstration. Soit A_1 un f-anneau quasi-archimédien infinitésimal. Alors $|ab| \leq |a|$ quels que soient $a, b \in A_1$. Donc $|a|$ majore $\langle aA_1 \rangle$ et, par conséquent, $aA_1 = 0$. Donc A_1 est un zéro anneau. Tout zéro anneau quasi-archimédien est archimédien.

Soit A_2 un f-anneau quasi-archimédien ayant localement des éléments dominants. Supposons que a soit un élément strictement positif de A_2 contenu dans tout idéal maximal dominé. L'espace $\mathcal{A}_2$ des idéaux maximaux dominés de A_2 peut être considéré comme un sous-espace ouvert partout dense de BA_2 . Considérons A_2 comme le f-anneau des sections de $\mathcal{F}^B(A_2)$. Puisque l'intersection des idéaux germinaux $\gamma(x)$, $x \in \mathcal{A}_2$, est nulle, le support de a rencontre $\mathcal{A}_2$. Soit $x \in \mathcal{A}_2 \cap \text{supp } a$. Il existe un élément d dans A_2^+ dominant tout idéal maximal γ appartenant à un certain voisinage V de x . Utilisant la propriété faible de Stone-Weierstraß, on peut supposer que $\text{supp } a \subseteq V$. Pour tout $\gamma \in V$, la fibre $A_2/\gamma(y)$ est un f-anneau quasi-local. Donc d majore l'idéal engendré par a modulo $\gamma(y)$ d'après [9]. Par conséquent, d majore $\langle a \rangle$. Puisque A_2 est supposé quasi-archimédien, on en déduit $a = 0$. Donc A_2 est $\mathcal{O}$ -semisimple.

Soit A un anneau quasi-archimédien quelconque. D'après 7.6, A possède des idéaux j_1 et j_2 , d'intersection zéro, tels que A/j_1 soit infinitésimal et que A/j_2 possède localement des éléments dominants. Si l'on pose $p_1 = j_1^{++}$ et $p_2 = j_2^{++}$, alors

$p_1 \cap p_2 = 0$ et $A_1 = A/p_1$ est infinitésimal et $A_2 = A/p_2$ possède localement des éléments dominants. D'après le lemme 8.3, A_1 et A_2 sont quasi-archimédiens. D'après ce qui précède, A est donc un produit sous-direct d'un zéro f-anneau archimédien A_1 et d'un f-anneau δ -semi-simple A_2 .

Inversement, tout zéro f-anneau archimédien et tout f-anneau δ -semi-simple est quasi-archimédien (cf. 8.5); et tout produit sous-direct de f-anneaux quasi-archimédiens est quasi-archimédien.

COROLLAIRE 1. - Pour un f-anneau A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est quasi-archimédien et n'a pas d'élément nilpotent non nul
- (b) A est δ -semi-simple.
- (c) Quels que soient $a, b \in A^+$, $sa \leq b$ pour tout $s \in A^+$ entraîne $a = 0$.
- (d) Quels que soient $a, b \in A^+$, $as \leq b$ pour tout $s \in A^+$ entraîne $a = 0$.
- (e) Quels que soient $a, b \in A^+$, $sas' \leq b$ pour tout $s, s' \in A^+$ entraîne $a = 0$.

COROLLAIRE 2. - Pour un f-anneau A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est quasi-archimédien.
- (b) Quels que soient $a, b \in A^+$, $as \leq b$ pour tout $s \in M$ entraîne $a = 0$, c'est à dire que A n'admet pas d'idéal à gauche majoré.
- (c) Quels que soient $a, b \in A^+$, $sa \leq b$ pour tout $s \in M$ entraîne $a = 0$, c'est à dire que A n'admet pas d'idéal à droite majoré.

COROLLAIRE 3. - (Henriksen et Isbell [17], 3.11; D.G. Johnson [21], 2.2). - Un f-anneau archimédien est un produit sous-direct d'un zéro f-anneau archimédien et d'un f-anneau δ -semi-simple archimédien.

Šatalova [30] a démontré le lemme suivant :

LEMME 8.7. - Soit j un idéal d'un f-anneau A . L'application $x \mapsto j \cap x$ donne une correspondance bijective entre les idéaux maximaux dominés de A ne contenant pas j et les idéaux maximaux dominés de j .

Les idéaux maximaux dominés de A ne contenant pas j forment une partie ouverte de δA . On vérifie facilement que $x \mapsto j \cap x$ est un homéomorphisme de ce sous-espace ouvert de δA sur δj ; donc :

COROLLAIRE. - Si j est un idéal d'un f-anneau A , δj est homéomorphe à un sous-espace ouvert de δA .

Nous dirons qu'un idéal j d'un f-anneau A est infinitésimal si j est un f-anneau infinitésimal. La somme de tous les idéaux infinitésimaux de A est aussi un idéal infinitésimal de A ; nous appellerons ce plus grand idéal infinitésimal de A le radical de Šatalova de A et nous le désignerons par $S(A)$. D'après 7.1 et 7.3, un f-anneau est infinitésimal si, et seulement si, il est un l_A -anneau au sens de Šatalova. Par conséquent, $S(A)$ est le A -radical de A dans la terminologie de Šatalova. Ainsi nous pouvons appliquer les résultats de Šatalova [30] sur le A -radical et nous avons :

PROPOSITION 8.8. - Tout f-anneau A possède un plus grand idéal infinitésimal $S(A)$, et $S(A)$ est l'intersection des idéaux maximaux dominés de A . On a $S(A/S(A)) = 0$, et si j est un idéal de A , $S(j) = j \cap S(A)$.

On peut déduire de cette proposition une autre caractérisation des f-anneaux $\mathcal{J}$ -semi-simples :

COROLLAIRE. - Un f-anneau est $\mathcal{J}$ -semi-simple si, et seulement si, il n'admet aucun idéal infinitésimal non nul.

Les f-anneaux quasi-archimédiens et $\mathcal{J}$ -semi-simples ont une définition qui ressemble beaucoup à la définition d'un groupe réticulé archimédien. Ceci permet de démontrer des théorèmes sur cette classe de f-anneaux qui correspondent presque verbalement aux résultats de Bigard concernant les groupes réticulés archimédiens [3], p. 23 - 28.

9. Annéloïdes réticulés quasi-réguliers et hyper-archimédiens.

Cette section traite des problèmes concernant une classe d'annéloïdes réticulés correspondant à la classe des anneaux biréguliers dans la théorie des anneaux.

DEFINITION 9.1. - Un annéloïde réticulé A est appelé quasi-régulier si tout idéal principal de A est un facteur direct, c'est à dire si le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux de A est plat.

On vérifie facilement qu'une somme directe d'annéloïdes réticulés quasi-réguliers est quasi-régulier et que toute image homomorphe d'un annéloïde réticulé quasi-régulier est aussi quasi-régulier. Le théorème I.6.5 fournit plusieurs caractérisations :

PROPOSITION 9.2. - Pour un annéloïde réticulé A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est quasi-régulier.
- (b) Pour tout idéal irréductible x de A , $\gamma(x) = x$.
- (c) $\mathcal{I}(A)$ est un treillis arithmétique et tout idéal irréductible de A est maximal.
- (d) $\mathcal{I}(A)$ est arithmétique, A est μ -semi-simple et les ensembles $S_{\mu A}(a)$, $a \in A$, forment une base d'ouverts compacts de μA .

Si A est un f-annéloïde, le treillis des idéaux de A est arithmétique d'après 1.14. Puisqu'un idéal x d'un f-annéloïde A est irréductible si et seulement si A/x est totalement ordonné, la propriété (c') est équivalente à la propriété (c'') dans le corollaire suivant. La propriété (e) ci-dessous est équivalente à (c') d'après le corollaire 1 de I.6.5 ; on a en effet $\gamma(x) = x$ pour tout idéal irré-

ductible x d'un f -annéloïde A .

COROLLAIRE. - Pour un f -annéloïde A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est quasi-régulier.
- (b) $\gamma(x) = x$ pour tout idéal irréductible x de A .
- (c') Tout idéal irréductible de A est maximal.
- (c'') Toute image homomorphe totalement ordonnée de A est simple.
- (d') A est μ -semi-simple et les ensembles $S_{\mu A}(a)$, $a \in A$, forment une base d'ouverts compacts de l'espace μA .
- (e) Tout idéal propre de A est une intersection d'idéaux maximaux.

Remarquons que L. Lesieur a démontré ([26], théorème 10) qu'un anneau commutatif unitaire est régulier (au sens de von Neumann) si, et seulement si, il vérifie (e).

Rappelons qu'un f -annéloïde A est dit simple si A n'est pas réduit à l'élément zéro et si A n'admet aucun idéal propre non nul. Si A est un annéloïde réticulé simple, l'idéal engendré par A^2 est égal à A ou $A^2 = 0$. Dans le deuxième cas, le groupe réticulé sous-jacent de A est simple.

Un annéloïde réticulé quasi-régulier est projectable. Nous pouvons donc appliquer théorème 5.6 et représenter A comme l'annéloïde réticulé des sections à supports compacts du faisceau $\mathcal{F}^\pi(A)$. Puisque les idéaux irréductibles de A sont tous maximaux, $\mathcal{F}^\pi(A) = \mathcal{F}^\mu(A)$ et les fibres de $\mathcal{F}^\pi(A)$ sont simples.

Soit inversement $\mathcal{F}$ un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés simples sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts. Alors $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est projectable d'après 5.6 et $\mathcal{F}^\pi(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ est isomorphe à $\mathcal{F}$. Par conséquent, tout idéal irréductible minimal de $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est

maximal. Donc $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est quasi-régulier. Ainsi nous avons démontré le théorème suivant qui correspond au théorème de représentation d'anneaux biréguliers de Dauns et Hofmann ([11], p. 110).

THEOREME 9.3. - Soit A un annéloïde réticulé quasi-régulier.
Alors $\mathcal{F}^\mu(A)$ est un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés simples
sur l'espace μA des idéaux maximaux de A , qui possède une base
d'ouverts compacts; et $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur
l'annéloïde réticulé $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A))$ des sections à supports compacts
de $\mathcal{F}^\mu(A)$.

Inversement, soit $\mathcal{F}$ un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés
simples sur un espace X ayant une base d'ouverts compacts. Alors
 $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé quasi-régulier tel que le faisceau
 $\mathcal{F}^\mu(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ soit isomorphe à $\mathcal{F}$.

Tout f-annéloïde simple est totalement ordonné. Donc :

COROLLAIRE. - Un f-annéloïde (resp. un f-anneau) est quasi-régulier
si, et seulement si, il est isomorphe au f-annéloïde (resp. au
f-anneau) de toutes les sections à supports compacts d'un faisceau
séparé d'annéloïdes (resp. d'anneaux) totalement ordonnés simples sur
un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts.

Soit S un annéloïde réticulé simple. Pour tout espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, soit $\mathcal{L}_k(X, S)$ l'annéloïde réticulé des fonctions localement constantes à supports compacts $f: X \longrightarrow S$. On peut considérer $\mathcal{L}_k(X, S)$ comme l'annéloïde réticulé des sections à supports compacts du faisceau trivial $\langle X \times S, \text{pr}_1, X \rangle$. Donc $\mathcal{L}_k(X, S)$ est quasi-régulier. Donnons une condition suffisante pour qu'un annéloïde réticulé quasi-régulier soit de la forme $\mathcal{L}_k(X, S)$:

PROPOSITION 9.4. - Soit A un annéloïde réticulé quasi-régulier.
Supposons que A contienne un sous-annéloïde réticulé simple S tel
que l'application canonique de A sur A/x induisse un isomorphisme
de S sur A/x . Alors μA est compact et A est isomorphe à
 $\mathcal{L}_k(\mu A, S)$.

Démonstration. Soit s un élément strictement positif de S .
 Alors s n'est contenu dans aucun idéal irréductible de A ; car s
 n'est contenu dans aucun idéal irréductible maximal de A et tout
 idéal irréductible de A est maximal d'après les hypothèses. Donc s
 est une unité formelle de A . Par conséquent, μA est compact. Soit
 $a \in A$ et $x \in \mu A$. Il existe $s \in S$ tel que les sections $\hat{s}$ et $\hat{a}$
 de $\mathcal{F}^\mu(A)$ coïncident en x . Donc $\hat{s}$ et $\hat{a}$ coïncident sur un cer-
 tain voisinage de x . Cela montre que $\mathcal{F}^\mu(A)$ est isomorphe au faisceau
 trivial $\langle \mu A \times S, \text{pr}_1, \mu A \rangle$; donc A est isomorphe à $\mathcal{L}_k(\mu A, S)$.

A partir de maintenant nous ne considérerons que des f-anneaux
 quasi-réguliers.

PROPOSITION 9.5. - Un f-anneau quasi-régulier A est la somme
directe d'un zéro f-anneau quasi-régulier et d'un f-anneau quasi-
régulier $\mathcal{O}$ -semi-simple.

Démonstration. Un f-anneau simple est un zéro anneau ou bien il
 possède un élément dominant. Montrons que $\mathcal{O}A$ est une partie ouverte
 et fermée de μA . Soit $x \in \mathcal{O}A$ et soit d un élément de A domi-
 nant x . Soit $\hat{d}$ la section correspondante du faisceau séparé $\mathcal{F}^\mu(A)$.
 L'ensemble U des $y \in \mu A$ tels que $\hat{d}^2(y) \geq \hat{d}(y) > 0_y$, est un voi-
 sinage de x , contenu dans $\mathcal{O}A$. Donc $\mathcal{O}A$ est ouvert. Soit
 $y \in \mu A \setminus \mathcal{O}A$ et soit $a \notin y$. Puisque A/y est un zéro anneau, $a^2 \in y$.

L'ensemble des $z \in \mu A$ tels que $\hat{a}(z) \neq 0_z$ et $\hat{a}^2(z) = 0_z$ est un voisinage de y ne rencontrant pas A ; car un f-anneau simple ayant un élément dominant n'admet aucun élément nilpotent non nul. Donc δA est aussi fermé. Il s'ensuit que A est la somme directe de $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A) | \delta A)$ et $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A) | \mu A \setminus \delta A)$. Le premier facteur est δ -semi-simple et le deuxième est un zéro anneau ; les deux sont quasi-réguliers.

Puisqu'un f-anneau δ -semi-simple n'a pas d'élément nilpotent non nul, la proposition précédente entraîne :

COROLLAIRE. - Un f-anneau quasi-régulier est δ -semi-simple si, et seulement si, il ne possède aucun élément nilpotent non nul.

Ainsi l'étude des f-anneaux quasi-réguliers a deux volets : l'étude des zéro f-anneaux quasi-réguliers et l'étude des f-anneaux quasi-réguliers sans éléments nilpotents non nuls. Le groupe réticulé additif d'un zéro f-anneau quasi-régulier possède la propriété suivante : Tout sous-groupe sous-treillis convexe engendré par un seul élément, est un facteur direct. Un tel groupe réticulé a été appelé hyper-archimédien par Bigard [3]. Au lieu d'étudier les zéro f-anneaux quasi-réguliers, on peut donc étudier les groupes réticulés hyper-archimédiens ce qui a été fait par Bigard [3], p. 29-35. Nous compléterons les résultats de Bigard à la fin de cette section. D'abord considérons les f-anneaux quasi-réguliers sans éléments nilpotents non nuls.

PROPOSITION 9.6. - Pour un f-anneau A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est un f-anneau quasi-régulier sans élément nilpotent non nul.
- (b) Tout idéal principal de A est idempotent.

(c) Tout idéal de A est idempotent.

(d) Tout idéal principal de A est engendré par un élément d vérifiant $d^2 \leq d \leq 0$.

(e) Tout idéal de A est l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux dominés.

Il est clair que (b) et (c) sont équivalentes. L'équivalence de (a) et de (e) est une conséquence des propriétés (a) et (e) du corollaire de 9.2 et de 9.5. (b) entraîne (d), et (d) entraîne (a) d'après le corollaire 1 de 7.9.

(a) $\implies$ (b) : Soit $a \in A$ et soit $\hat{a}$ la section de $\mathcal{F}^\mu(A)$ correspondant à a . Puisque A/x n'a pas d'élément nilpotent non nul quel que soit $x \in \mu A$, $\text{supp } \hat{a} = \text{supp } \hat{a}^2$. Puisque l'idéal de A engendré par a est l'intersection des idéaux maximaux contenant a , l'idéal de $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A))$ engendré par $\hat{a}$ est l'ensemble des sections dont le support est contenu dans le support de $\hat{a}$. Il s'ensuit que a et a^2 engendrent le même idéal, ce qui entraîne que cet idéal est de plus idempotent.

COROLLAIRE. - Si tout idéal d'un f-anneau A est engendré par un élément idempotent, alors A est quasi-régulier et n'a pas d'élément nilpotent non nul.

Remarque. - R. Blair [5] a appelé f-régulier tout anneau abstrait dont tout idéal principal est idempotent. Dans la théorie des anneaux abstraits, cette notion de f-régularité est beaucoup plus faible que la notion de birégularité. La proposition 9.6 montre que ces deux notions se confondent pratiquement dans la théorie des f-anneaux.

Tout f-anneau, dont le groupe réticulé additif sous-jacent est hyper-archimédien, sera appelé f-anneau hyper-archimédien. Tout f-anneau hyper-archimédien est quasi-régulier, car tout facteur direct du groupe réticulé additif sous-jacent d'un f-anneau est aussi un facteur direct du f-anneau A .

Un f-anneau archimédien quasi-régulier n'est pas nécessairement hyper-archimédien. Considérons par exemple le sous-anneau A de l'anneau de toutes les fonctions $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ engendré par les fonctions à supports finis et la fonction g définie par $g(m) = m\pi$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Alors A est un f-anneau archimédien quasi-régulier. Mais A n'est pas hyper-archimédien; on a en effet $ng \not\leq g^2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc le sous-groupe sous-treillis convexe de A engendré par g ne contient pas g^2 , bien que g^2 soit une unité formelle du f-anneau A . Les idéaux maximaux du f-anneau A sont:

$$1) \quad i(n) = \{f \in A; f(n) = 0\} \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N};$$

$$2) \quad i(\infty) = \{f \in A; f \text{ à support fini}\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A/i(n)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, tandis que $A/i(\infty)$ est isomorphe à l'anneau $t \cdot \mathbb{Z}[t]$ des polynômes d'une variable à coefficients entiers sans terme constant, ordonné lexicographiquement de façon que $t \ll t^2 \ll \dots$. Par conséquent, toutes les images homomorphes totalement ordonnées de A sont archimédiennes à l'exception d'une seule. Mais on a:

PROPOSITION 9.7. - Un f-anneau A est hyper-archimédien si, et seulement si, toute image homomorphe totalement ordonnée de A est archimédienne.

En effet, un groupe réticulé commutatif est hyper-archimédien si, et seulement si, toute image homomorphe totalement ordonnée de A est archimédienne.

Un anneau totalement ordonné archimédien est ou bien isomorphe à un sous-anneau du corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou bien un zéro anneau dont le groupe additif est isomorphe à un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ (cf. [15], p. 126). Un anneau (resp. un groupe) totalement ordonné isomorphe à un sous-anneau (resp. un sous-groupe additif) de $\mathbb{R}$ sera appelé anneau réel (resp. groupe réel). Le théorème 9.3 donne une équivalence entre f-anneaux (resp. groupes réticulés) hyper-archimédiens et une certaine classe de faisceaux :

THEOREME 9.8. - Soit A un f-anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul (resp. un groupe réticulé hyper-archimédien). Alors $\mathcal{T}^\mu(A)$ est un faisceau séparé d'anneaux réels (resp. de groupes réels) sur l'espace μA , qui possède une base d'ouverts compacts ; et $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\bigcap_k (\mathcal{T}^\mu(A))$.

Inversement, soit $\mathcal{F}$ un faisceau séparé d'anneaux (resp. de groupes réels) sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, alors $\bigcap_k (\mathcal{F})$ est un f-anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul (resp. un groupe réticulé hyper-archimédien) tel que les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{T}^\mu(\bigcap_k (\mathcal{F}))$ soient isomorphes.

Si R est un anneau réel (resp. un groupe réel) et X un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts, $\mathcal{L}_k(X, R)$ est un f-anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul (resp. un groupe réticulé hyper-archimédien). $\mathcal{L}_k(X, R)$ est un sous-anneau réticulé (resp. un sous-groupe réticulé) de $\mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$. On peut construire d'autres f-anneaux (resp. groupes réticulés) hyper-archimédiens, qui

sont contenus dans $\mathcal{L}_K(X, \mathbb{R})$, de la manière suivante :

Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X , stable pour des intersections finies. Associons à tout ouvert U_ι un sous-anneau (resp. un sous-groupe additif) R_ι de $\mathbb{R}$ tel que $R_\iota \subseteq R_{\iota'}$ chaque fois que $U_\iota \supseteq U_{\iota'}$. Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ le sous-faisceau du faisceau trivial $\langle X \times \mathbb{R}, \text{pr}_1, X \rangle$, avec $E = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota \times R_\iota$. Alors $\Gamma_K(\mathcal{F})$ est un f-anneau (resp. un groupe réticulé) qui est hyper-archimédien d'après 9.8 et qui peut être considéré comme un sous-anneau (resp. un sous-groupe additif) réticulé de $\mathcal{L}_K(X, \mathbb{R})$.

Donnons un critère permettant de trouver d'autres f-anneaux hyper-archimédiens de fonctions réelles :

LEMME 9.9. - Soit X un espace topologique localement compact. Soit G un sous-groupe réticulé additif de l'anneau $\mathcal{C}_K(X)$ des fonctions réelles continues à supports compacts, définies sur X , tel que pour tout $x \in X$, il existe $f \in G$ vérifiant $f(x) \neq 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) G est hyper-archimédien.
- (b) Pour tout $f \in G$, $N_f = \{x \in X; f(x) = 0\}$ est ouvert.
- (c) Pour tout $0 < f \in G$, il existe $0 < r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < f(x)$ pour tout x vérifiant $f(x) \neq 0$.

Démonstration. (a) $\implies$ (b) : Pour tout $x \in X$, soit

$$m(x) = \{f \in G; f(x) = 0\},$$

$$o(x) = \{f \in G; f \text{ s'annule dans un voisinage de } x\}.$$

Alors $m(x)$ est un idéal maximal de G et $o(x)$ est un idéal de G contenant l'idéal germinal $\gamma(m(x))$ associé à $m(x)$. Si G est hyper-archimédien, $\gamma(m(x)) = m(x)$ d'après 9.2. Par suite $m(x) = o(x)$ quel que soit $x \in X$. Donc N_f est ouvert pour tout $f \in G$.

(b) $\implies$ (c) : Si N_f est ouvert, $X \setminus N_f$ est compact; donc

$f(X \setminus N_f)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Si f est positive, il existe donc $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < f(X \setminus N_f)$.

(c) $\implies$ (a): L'idéal de G engendré par une fonction $f \in G$ est l'ensemble des $g \in G$ dont le support est contenu dans le support de f . Soit $0 \leq h \in G$. Il existe n tel que $nf(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in \text{supp } f$. Soient

$$h_1 = (h - n|f|)^+ \quad \text{et} \quad h_2 = (h - n|f|)^- + n|f|;$$

alors $h = h_1 + h_2$; h_2 est orthogonal à f et le support de h_1 est contenu dans le support de f . On en déduit que l'idéal engendré par f est un facteur direct de G .

P. Conrad a donné un exemple d'un groupe réticulé hyper-archimédien G du type considéré dans le lemme 9.9, qui ne peut pas être représenté comme sous-groupe d'un groupe réticulé hyper-archimédien du type $\mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$ (cf. [3], p. 32):

Soit X l'espace compact $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(n) = \pi + \frac{1}{n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $g(\infty) = \pi$. Soit G le sous-groupe de $\mathcal{L}_k(X)$ engendré par g , la fonction constante 1 et les fonctions continues à supports finis. Alors G est un groupe réticulé hyper-archimédien; pour toute représentation de G par des fonctions réelles, la fonction représentant g ou la fonction représentant 1 possède une infinité de valeurs.

En modifiant cet exemple, on trouve un f -anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul du type considéré dans le lemme 9.9, qui ne peut pas être représenté comme sous-anneau d'un f -anneau du type $\mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$:

Soient X et G comme ci-dessus. Soit A le sous-anneau de $\mathcal{L}(X)$ engendré par G . Toute fonction $f \in A$ est de la forme

$$f = u + k_0 + k_1 g + k_2 g^2 + \dots + k_n g^n,$$

où u est à support fini et où $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ sont des entiers. On vérifie facilement que A est réticulé et que la propriété (c) de 9.9 est vérifiée. Donc A est un f -anneau hyper-archimédien. Puisque A contient G , il ne peut pas être représenté par des fonctions réelles ayant seulement un nombre fini de valeurs.

Montrons maintenant que tout f -anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul peut être représenté par un anneau de fonctions réelles continues du type considéré dans le lemme 9.9. Cette représentation est évidemment un cas particulier de la représentation d'anneaux réticulés archimédiens donnée par D.G. Johnson [21]:

THEOREME 9.10. - Pour qu'un f -anneau A sans élément nilpotent non nul soit hyper-archimédien, il faut et il suffit que A puisse être représenté par un f -anneau $\tilde{A}$ de fonctions réelles continues à supports compacts, définies sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, tel que $N_f = \{x \in X; f(x) = 0\}$ soit ouvert pour tout $f \in \tilde{A}$.

Démonstration. La condition est suffisante; car on peut remarquer que dans le lemme 9.9, la démonstration des implications $(b) \implies (c) \implies (a)$ ne nécessite pas l'hypothèse que, pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrons que la condition est aussi nécessaire: Considérons la représentation de A par des sections du faisceau $\mathcal{F}^\mu(A)$ sur l'espace μA des idéaux maximaux de A . Pour tout $x \in \mu A$, la fibre A/x est un anneau réel. Il y a un unique homomorphisme injectif $\varphi_x: A/x \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $a \in A$, soit $\tilde{a}: \mu A \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\tilde{a}(x) = \varphi_x \hat{a}(x)$. L'ensemble $\tilde{A} = \{\tilde{a}; a \in A\}$ est un f -anneau de fonctions réelles définies sur μA et $a \longmapsto \tilde{a}$ est un isomorphisme de A sur $\tilde{A}$. Montrons que $\tilde{a}$ est continue quel que soit $a \in A$.

Soit $a \in A$ et soient $r = \frac{n}{m}$ et $r' = \frac{n'}{m'}$ deux nombres rationnels tels que $r < r'$. Considérons l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]r, r'[$ par $\tilde{a}$:

$$\begin{aligned}\tilde{a}^{-1}(]r, r'[) &= \{x \in \mu A ; \frac{n}{m} < \tilde{a}(x) < \frac{n'}{m'}\} \\ &= \{x \in \mu A ; nm' < mm'\tilde{a}(x) < n'm\}.\end{aligned}$$

Si $0 \notin]r, r'[$, on a

$$\begin{aligned}&= \{x \in \mu A ; nm'\tilde{a}(x) < mm'\tilde{a}^2(x) < n'm\tilde{a}(x)\} \\ &= \{x \in \mu A ; nm'\hat{a}(x) < mm'\hat{a}^2(x) < n'm\hat{a}(x)\}.\end{aligned}$$

Si $0 \in]r, r'[$, on a

$$\begin{aligned}&= \{x \in \mu A ; nm'\hat{a}(x) < mm'\hat{a}^2(x) < n'm\hat{a}(x)\} \\ &\cup \{x \in \mu A ; \hat{a}(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, $\tilde{a}^{-1}(]r, r'[)$ est ouvert. De plus,

$$N_{\tilde{a}} = \{x \in \mu A ; \tilde{a}(x) = 0\} = \{x \in \mu A ; \hat{a}(x) = 0\}$$

est une partie ouverte de μA . Ainsi le théorème est démontré.

Soit R un anneau réel. Nous appellerons f-algèbre sur R tout f-anneau A qui est aussi une algèbre sur R tel que $ra > 0$ quels que soient $0 < r \in R$ et $0 < a \in A$.

THEOREME 9.11. - Soit A une f-algèbre sur un anneau réel R . Pour que A soit isomorphe à $\mathcal{L}_k(X, R)$, où X désigne un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts, il faut et il suffit que toute image homomorphe totalement ordonnée de A soit isomorphe à R .

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit A un f-algèbre sur R , dont toute image homomorphe totalement ordonnée est isomorphe à R . D'après 9.7, A est hyper-archimédien. A tout élément $a \in A$, associons une application $\tilde{a}: \mu A \longrightarrow R$ comme dans la démonstration du théorème précédent.

Soit $r \in R$ et soit $U = \{x \in \mu A; \tilde{a}(x) = r\}$. Si $r = 0$, alors $U = N_{\tilde{a}}$. Si $r \neq 0$, $U = \{x \in \mu A; \tilde{a}^2(x) = r\tilde{a}(x)\} =$
 $= \{x \in \mu A; \hat{a}^2(x) = r\hat{a}(x)\}$.

Dans les deux cas, U est ouvert. On en déduit que le faisceau $\mathcal{F}^\mu(A)$ est isomorphe au faisceau trivial $(\mu A \times R, pr_1, \mu A)$. Par conséquent, A est isomorphe à $\mathcal{L}_K(X, R)$.

COROLLAIRE 1. - Toute f-algèbre sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédienne est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{L}_K(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles localement constantes, définies sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts.

En effet, si A est une f-algèbre sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédienne, A/x est isomorphe à $\mathbb{R}$ quel que soit $x \in \mu A$.

COROLLAIRE 2. - Un f-anneau A est isomorphe à l'anneau réticulé $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{Z})$ des fonctions continues à supports compacts, définies sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, si et seulement si tout élément positif de A est une somme d'éléments idempotents.

En effet, tout élément positif de $\mathcal{C}_K(X, \mathbb{Z})$ est une somme d'idempotents positifs. Inversement, supposons que tout élément positif de A soit une somme d'éléments idempotents. Pour tout idéal irréductible x de A , l'anneau quotient A/x est un anneau totalement ordonné dont tout élément est une somme d'éléments idempotents. D'après le théorème 2.4 de Henriksen et Isbell [17], A/x contient un seul élément idempotent non nul. On en déduit que A/x est isomorphe à $\mathbb{Z}$. D'après le théorème, A est donc isomorphe à $\mathcal{L}_K(\mu A, \mathbb{Z}) = \mathcal{C}_K(\mu A, \mathbb{Z})$.

Subramanian [33] a démontré qu'un f-anneau unitaire commutatif engendré par ses éléments idempotents est isomorphe à un anneau de fonctions continues $\mathcal{C}(X, \mathbb{Z})$, où X est un espace compact booléen. Notre Corollaire 2 est une généralisation de ce résultat.

Pour démontrer des théorèmes pour les groupes réticulés hyper-archimédiens, analogues aux théorèmes 9.10 et 9.11, il faut des hypothèses supplémentaires. La raison est qu'un homomorphisme injectif d'un groupe réel dans $\mathbb{R}$ n'est pas unique; il est unique à une homothétie près (cf. [15], p. 46).

THEOREME 9.12. - Soit A un groupe réticulé hyper-archimédien ayant un élément archimédien u . Alors A peut être représenté par un sous-groupe réticulé additif $\tilde{A}$ de $\mathcal{C}_k(\mu A)$, qui contient la fonction constante 1 et qui est tel que $N_f = \{x \in \mu A; f(x) = 0\}$ soit ouvert pour tout $f \in \tilde{A}$.

Démonstration. Considérons le faisceau $\mathcal{T}^\mu(A)$. Pour tout $x \in \mu A$, il y a un homomorphisme injectif φ_x de la fibre A/x dans $\mathbb{R}$ tel que $\varphi_x \hat{u}(x) = 1$. A tout élément a de A , associons la fonction $\tilde{a}: \mu A \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\tilde{a}(x) = \varphi_x \hat{a}(x)$ quel que soit $x \in \mu A$. Les fonctions $\tilde{a}$, $a \in A$, forment un groupe réticulé $\tilde{A}$ de fonctions réelles, isomorphe à A . On a évidemment $\tilde{u}(x) = 1$ quel que soit $x \in \mu A$. Pour tout $a \in A$, le support de $\tilde{a}$ est compact et $N_{\tilde{a}} = \mu A \setminus \text{supp } \hat{a}$ est ouvert. Pour montrer que $\tilde{a}$ est continue, prenons deux nombres rationnels $r = \frac{n}{m}$ et $r' = \frac{n'}{m'}$ tels que $r < r'$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{-1}(]r, r'[) &= \{x \in \mu A; \frac{n}{m} < \tilde{a}(x) < \frac{n'}{m'}\} \\ &= \{x \in \mu A; nm' < mm'\tilde{a}(x) < n'm\} \\ &= \{x \in \mu A; nm'\hat{u}(x) < mm'\hat{a}(x) < n'm\hat{u}(x)\}. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{a}^{-1}(]r, r'[)$ est ouvert et $\tilde{a}$ est continue.

THEOREME 9.13 (Bigard [3], p. 33). - Soit A un espace vectoriel
réticulé sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédien ayant un élément archimédien u .
Alors A est isomorphe à $\mathcal{L}_k(\mu A, \mathbb{R})$.

Ce théorème peut être démontré facilement à l'aide de 9.4.

Remarque. - Les théorèmes 9.12 et 9.13 restent valables si l'on
remplace l'hypothèse de l'existence d'un élément archimédien par
l'hypothèse " μA paracompact". Car si μA est paracompact, il y a un
recouvrement de μA par des ensembles ouverts compacts deux à deux
disjoints et, par suite, A est la somme directe de sous-groupes
(resp. de sous-espaces vectoriels) réticulés hyper-archimédiens ayant
un élément archimédien.

INDEX

absolument germinal	50, 76
accessible	7
A-homomorphisme	84
algébrique	12
annéloïde réticulé	55
--- totalement ordonné	55
anneau réel	131
anneau réticulé	55
bipolaire	58
Brouwer (treillis de ---)	4
chaîne normale	31
coeur	108
compact	11
conforme	78
c-r-idéal	32
c-r-voisinage	31
disjoint	58
Λ -distributif général	4
dominant, dominé	108
enveloppe orthocomplète	90
enveloppe stonienne	85
extension	84
facteur direct	59
faisceau	64
f-annéloïde	59
f-anneau	59
fibre	64
filtre	15
-- premier	15
germinal	20, 95
absolument ---	50, 76
Glivenko (théorème de ---)	3,4

groupe réel	131
groupe réticulé	54
hyper-archimédien	128, 130
idéal	56
idempotent (idéal ---)	116
infinitésimal (idéal ---)	109
irréductible (élément ---)	3
(idéal ---)	57
(sous-directement ---)	108
Isbell (espace de ---)	74
Kolmogoroff (espace de ---)	7
latéralement complet	90
morphisme (--- de treillis	
distributifs pseudo-complémentés)	40
(--- de faisceau)	65
O-distributif	17
orthocomplet	90
orthogonal	55
plat	26
polaire	58
premier	3, 15
primaire	22
projetable	25, 90, 97
propriété d'extension	66
propriété faible de Stone-	
Weierstraß	67
pseudo-complément(é)	3
quasi-archimédien	118
quasi-local	101
quasi-régulier	124
réel (anneau ---, groupe ---)	131
régulier (ouvert ---, fermé ---)	5
représentable	59
r-voisinage	30
séparé (faisceau ---)	64

simple	108
somme directe	59
Stone (treillis de ---)	24
(espace de ---)	45, 82
Stone-Cech-Isbell (espace de -)	36
Stone-Weierstraß	67
support	65
ultrafiltre	15
unité faible	109
unité formelle	68
valeur	11, 57
variété	55
zéro annéloïde	55

NOTATIONS

$a^\perp, M^\perp$	3,58	μA	101
$\langle a \rangle$	57	μT	12
A^+	55	$\tilde{F}^\mu(A)$	101
$B(A)$	58	μ -semisimple	101
$B(T)$	4	πA	95
$\mathcal{C}_X$	5,40	πT	17
$\mathcal{K}_X$	5	$\tilde{F}^\pi(A)$	95
Z_X	5	σA	82
S_X	5	σT	45
BT	36	$\tilde{F}^\sigma(A)$	82
BA	74	ξA	96
$\tilde{F}^B(A)$	76	ξT	12
ΓF	65	$\tilde{F}^\xi(A)$	96
$\gamma(x)$	20	$\mathcal{J}(A)$	57
$\gamma(\varphi)$	76	$\mathcal{J}(T)$	32
$\mathcal{I}_A$	108	$\mathcal{J}(f)$	79
$\mathcal{I}$ -semisimple	119		

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNAU, S.J.: Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings. Proc. London Math. Soc. (3) 15, 599 - 631 (1965).
- [2] ---- : Orthocompletion of lattice groups. Proc. London Math. Soc. (3), 16, 107 - 130 (1966).
- [3] BIGARD, A.: Contribution à la théorie des groupe réticulés. Thèse Fac. Sci. Paris (1969).
- [4] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Amer.Math.Soc. Coll. Publ. 3rd edition (1967).
- [5] BLAIR, R.L.: Ideal lattices and the structure of rings. Trans. Amer. Math. Soc. 75, 136 - 153 (1963).
- [6] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Chap. 1, 4^e édition, Hermann Paris (1965).
- [7] BOURBAKI, N.: Algèbre commutative. Chap. 1-2, Hermann, Paris (1961).
- [8] BYRD, R.D.: Lattice ordered groups. Thèse, Tulane University (1966).
- [9] CONRAD, P.F. Introduction à la théorie des groupes réticulés. I.H.P. Paris (1967).
- [10] DAUNS, J.: Representation of L-groups and F-rings Pac. J. Math., 31, 629 - 654 (1969).
- [11] DAUNS, J. and K.H. HOFMANN: The representation of biregular rings by sections. Math. Zeitschrift 91, 103 - 123 (1966).
- [12] --- ---- : Representation of rings by sections. Mem. Amer. Math. Soc. 83 (1968).
- [13] DOWKER, C.H.: Lectures on sheaf theory. Tata Institute of Fundamental research, Bombay (1957).
- [14] FRINK, O.: Pseudo-complements in semilattices, Duke Math. J. 29, 505 - 514 (1962).
- [15] FUCHS, L.: Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press, Oxford (1963).
- [16] GRÄTZER, G. and E.T. SCHMIDT: On a problem of M.H. Stone. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 8, 455 - 460 (1957).

- [17] HENRIKSEN, M. and J.R. ISBELL: Lattice-ordered rings and function rings. *Pac.J.Math.* 12, 533-565 (1962).
- [18] ISBELL, J.R.: A structure space for certain lattice ordered groups and rings. *J. London Math. Soc.* 40, 63-71 (1965).
- [19] JACOBSON, N.: Structure of rings. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXXVII, New York (1956).
- [20] JOHNSON, D.G.: A structure theory for a class of lattice ordered rings. *Acta math.* 104, 163-215 (1960).
- [21] --- : On a representation theory for a class of archimedean lattice-ordered rings. *Proc. London Math. Soc.* (3) 12, 207-225 (1962).
- [22] KEIMEL, K.: Représentation d'anneaux réticulés dans des faisceaux. *C.R. Acad. Sci. Paris* 266, 124-127 (1968).
- [23] KEIMEL, K.: Anneaux réticulés quasi-réguliers et hyper-archimédiens *C.R. Acad. Sci. Paris* 266, 524-525 (1968).
- [24] --- : Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben; bireguläre Halbgruppen. *Math. Nachrichten* 45, 81-96 (1970).
- [25] KIST, J.E.: Representation of archimedean function rings. *Illinois J. Math.* 7, 269-278 (1963).
- [26] LESIEUR, L.: Divers aspects de la théorie des idéaux d'un anneau commutatif. *Enseignement Math.* (2) 13, 75-85 (1967).
- [27] PAPERT, D.: A representation theory for lattice groups. *Proc. London Math. Soc.* (3) 2, 100-120 (1962).
- [28] PIERCE, R.S.: Modules over commutative rings. *Mem. Amer. Math. Soc.* 70 (1967).
- [29] SAMUEL, P.: Ultrafilters and compactifications of uniform spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 64, 100-132 (1948).
- [30] ŠATALOVA, M.A.: l_A - et l_I -anneaux (en russe). *Sibirsk Mat. Z.* 7, 1383-1399 (1966).
- [31] ŠIK, F.: Estructura et realizaciones de grupos reticulados I,II. *Mem. Fac. Cie. Univ. La Habana* 1, ser. mat., fasc. 2-3, 11-29 (1964).
- [32] --- : Struktur und Realisierungen von Verbandsgruppen III,IV. *Mem. Fac. Cie. Univ. La Habana* 1, ser. Mat., fasc. 4, 1-20 (1966); fasc. 7, 19-44 (1968).

- [33] SUBRAMANIAN, H.: Integer valued continuous functions, Bull. Soc. math. France 97, 275 - 283 (1969).
- [34] TELEMAN, S.: La représentation des anneaux réguliers par des faisceaux. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 14, 703 - 717 (1969).
- [35] ----- : La représentation des anneaux Tauberiens par des faisceaux. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 14, 249 - 264 (1969).
- [36] ----- : Représentation par faisceaux des modules sur les anneaux harmoniques. C.R. Acad. Sci. Paris 269, 753 - 756 (1969).
- [37] ----- : La représentation des algèbres de von Neumann finies par faisceaux, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 15, 143 - 152 (1969)
- [38] VARLET, J.: Contribution à l'étude des treillis pseudo-complémentés et des treillis de Stone. Mem. Soc. Roy. Liège 8, 1 - 71 (1963).
- [39] ----- : On the characterisation of Stone lattices. Acta Math. Szeged. 27, 81 - 84 (1966).
- [40] VEKSLER, A.I.: Lattice orders in algebras and rings. Soviet Math. Dokl. 6, 1201 - 1204 (1965), traduction anglaise.
- [41] VULIKH, B.Z.: Introduction to the theory of partially ordered spaces. Groningen (1967), traduction anglaise.
- [42] KIST, J.: Compact spaces of prime ideals. Math. Zeitschr. 111, 151 - 158 (1969).
- [43] MULVEY, Ch.: Représentation de produits sous-directs d'anneaux par espaces annelés. C.R. Acad. Sci. Paris 270, 564 - 567 (1970).

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I. ELEMENTS PREMIERS D'UN TREILLIS	1
1. Préliminaires	3
2. Espaces d'éléments premiers	5
3. Compacité	11
4. Eléments premiers et filtres premiers	15
5. Elément germinal associé à un élément premier	20
6. Treillis projetables et plats	24
CHAPITRE II. L'ESPACE DE STONE-CECH-ISBELL D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF PSEUDO-COMPLEMENTE	29
1. c-r-voisinages et c-r-idéaux	30
2. L'espace de Stone-Cech-Isbell	36
3. Morphismes et applications continues	40
4. Propriétés de l'espace de Stone-Cech-Isbell	45
CHAPITRE III. REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX RÉTICULES. APPLICATIONS	54
1. Annéloïdes réticulés	54
2. Faisceaux d'annéloïdes réticulés	64
3. Représentation sur l'espace d'Isbell	74
4. Représentation sur l'espace de Stone. Enveloppe stonienne et enveloppe orthocomplète	82
5. Représentation sur l'espace des idéaux irréductibles minimaux	95
6. Représentation sur l'espace des idéaux maximaux	101
7. Idéaux dominés d'un f-anneau	108
8. f-anneaux quasi-archimédiens et δ -semisimples	118
9. Annéloïdes réticulés quasi-réguliers et hyper- archimédiens	124
INDEX	139
NOTATIONS	141
BIBLIOGRAPHIE	142

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Méthodes combinatoires de Cartier-Foata
en calcul des probabilités**

Vu et approuvé

Paris, le 26 Juin 1970

**Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris**

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Robert MALLET

